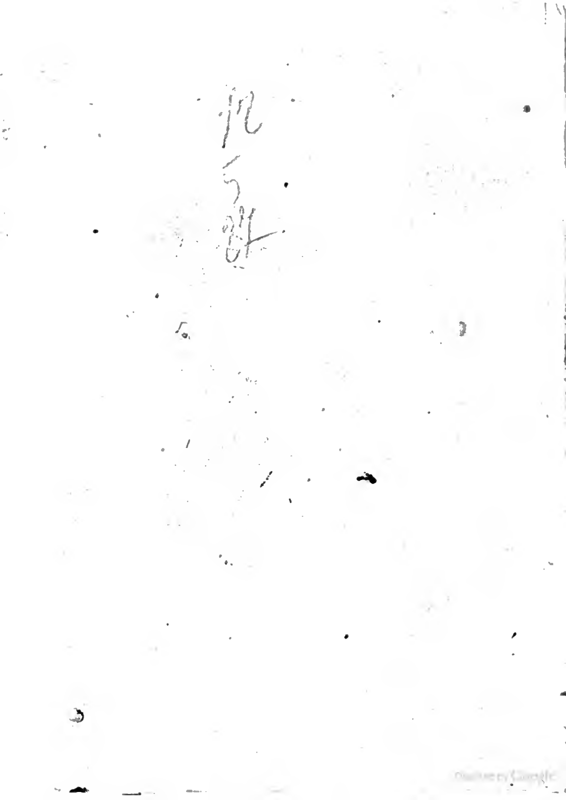




DO PIZZOFALCONE
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine
NAZIONALE
B. Prov.
APOLI





ELEMENS

DES

PRINCIPALES PARTIES

DES

MATHÉMATIQUES.

ELEMENS
GENERAUX
DES PRINCIPALES PARTIES
DES
MATHÉMATIQUES,
NECESSAIRES
A L'ARTILLERIE ET AU GÉNIE.

Par M. l'Abbé Deidier, *Professeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de* la Fere.

TOME SECOND.



A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,
Chez Charles-Antoine Jombert, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la ruë Gille-Cœur, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



C. Cochin filius inv. et Sculpsit.

ELEMENS
DES PRINCIPALES PARTIES
DES MATHEMATIQUES.

LIVRE TROISIÉME,

Contenant les Regles de l'Arithmétique des Infinis, & leur application à la Géométrie, la Méchanique, la Statique, l'Hydrostatique, l'Airométrie, l'Hydraulique, & un Traité de Perspective.

CHAPITRE PREMIER.

Des Principes de l'Arithmétique des Infinis, & de leur application à la Géométrie, & à la Mesure des Surfaces & des Solides.

1. ESURER ou chercher la valeur d'une figure MNR (*Fig.* 1.), c'est la même chose que de chercher la valeur de la somme de ses élemens infiniment proches AB, CD, &c. qui la composent. Or si ces élemens sont tous égaux entr'eux (*Fig.* 2.); il est évident que leur somme est égale au produit du dernier

élement ou de sa base NR par le nombre qui en exprime la multitude, c'est à-dire, par la hauteur ou la droite MN qui coupe tous ces élemens perpendiculairement ; mais si les élemens sont inégaux (*Fig.* 1.) on ne peut trouver leur somme que par le rapport qu'elle a au produit du dernier ou plus grand élement NR multiplié par la hauteur MN qui en exprime la multitude, & ce rapport est le même, comme on voit que celui de la figure au rectangle circonscrit NMHR.

2. Il en est de même à l'égard des solides ; si les plans élementaires qui composent un corps, sont tous égaux (*Fig.* 4.), la valeur de ce corps ou la somme de ses élemens n'est autre chose que le produit de l'élement ou plan XNRS par le nombre qui en exprime la multitude, c'est-à-dire, par la hauteur ou la perpendiculaire MN qui coupe tous ses élemens. Mais si les plans élementaires d'un solide (*Fig* 3.) sont inégaux, on ne peut en connoître la valeur ou la somme des élemens que par le rapport de cette somme au produit du dernier ou plus grand élement XNRS par la hauteur XM qui en exprime la multitude, & ce rapport est le même que celui du solide au Prisme circonscrit XT.

3. La ligne NM (*Fig.* 1.) qui coupe perpendiculairement tous les élemens d'une figure, est coupée par ces élemens en une infinité de petites parties toutes égales; c'est pourquoi les abscisses MA, MC, &c. correspondantes aux élemens à commencer depuis la premiere au sommet M, laquelle est infiniment petite ou zero jusqu'à la derniere MN sont entr'elles comme la suite infinie o. 1. 2. 3. 4. 5. &c. des nombres naturels ; car comme il faut une infinité d'élemens pour composer une surface, il y a aussi une infinité d'abscisses correspondantes à ces élemens. Or il arrive toujours que les élemens d'une figure ont un rapport connu ou inconnu à leur abscisses, par exemple dans le triangle (*Fig.* 5.) les élemens AB, CD, &c. sont entr'eux comme leur abscisses MA, MC, &c. ou comme la suite infinie des nombres naturels o. 1. 2. 3. 4 5. &c. dans le complement MNR de la parabole ordinaire (*Fig.* 6.) les élemens AB, CD, &c. sont entr'eux comme les quarrés de leurs abscisses, ou comme la suite infinie o. 1. 4. 9. 16. &c. des quarrés de la suite infinie des nombres naturels o. 1. 2. 3. 4. 5. &c. au contraire dans la parabole ordinaire (*Fig.* 7.) les quarrés des élemens étant entr'eux comme les abscisses, ces mêmes élemens sont entr'eux comme les racines quarrées des abs-

ſes ou des nombres o. 1. 2. 3. 4. 5. &c. à l'infini. Dans d'autres figures les élemens ſont entr'eux ou comme les cubes, ou comme les quatriémes puiſſances ou comme les cinquiémes, les ſeptiémes puiſſances, &c. des nombres o. 1. 2. 3. 4. 5. &c. à l'infini, dans d'autres ils ſont comme les racines quatrées ou les racines cubiques ou les racines quatriéme, &c. des nombres o. 1. 2. 3. 4. 5. &c. à l'infini. Dans d'autres ils peuvent être comme quelque puiſſance des nombres o. 1. 2. 3. &c. multipliée par une autre puiſſance de ces mêmes nombres, par exemple comme les quarrés multipliés par les cubes, ou comme quelque puiſſance multipliée par quelque racine, ou comme quelque puiſſance diviſée par quelqu'autre puiſſance ou par quelque racine, ou comme quelque puiſſance augmentée ou diminuée de quelque autre puiſſance ou de quelque racine, ou comme les quarrés ou les cubes ou les quatriémes puiſſances, &c. de quelque puiſſance augmentée ou diminuée d'une autre puiſſance, ou d'une racine, ou comme des moyennes proportionnelles priſes entre les termes d'une puiſſance & les termes d'une autre puiſſance ou d'une racine, &c. ce qui peut ſe combiner comme on voit d'une infinité de façons. Et il faut dire la même choſe des Elemens qui compoſent un ſolide.

4. Connoiſſant donc le rapport qui ſe trouve entre les Elemens d'une figure ou d'un ſolide, les Regles *de l'Arithmétique des Infinis* nous apprennent à trouver tout d'un coup la valeur de la figure ou du ſolide, c'eſt-à-dire, le rapport de la ſomme des élemens au dernier & plus grand élement multiplié par le nombre qui en exprime la multitude, ou par le nombre des termes, lequel rapport, comme nous avons déja dit, eſt le même que celui de la figure ou du ſolide au parallelogramme ou au priſme circonſcrit. Or ces regles dépendent du Problême ſuivant, & des obſervations que nous ferons enſuite ſur la nature des nombres qu'on nomme *Infinis*.

5. PROBLEME. *Une ſuite quelconque finie & déterminée de nombres en progreſſion Arithmétique aſcendante étant donnée, trouver la ſomme des quarrés de ces nombres, celle de leurs cubes, celle de leurs troiſiémes puiſſances, &c.*

Soient les nombres en progreſſion Arithmétique aſcendante $a, b, c, f,$ qui different entr'eux d'une quantité quelconque que nous nommerons d. Si je veux trouver la ſomme des quarrés de ces nombres, je prens celui qui viendroit immédiatement après

le dernier f, si la progression étoit continuée, je le nomme x, & je l'éleve à une puissance plus élevée d'un degré que celle des quarrés que je cherche, c'est-à-dire au cube, & j'ai x^3. Or comme tous les termes de la progression se surpassent d'une même quantité d, il est évident que $x = f + d$, & par conséquent $x^3 = f^3 + 3ffd + 3fdd + d^3$, je prens les coefficiens des puissances de f, dans le second membre de cette équation, c'est-à-dire, les grandeurs qui multiplient les puissances de f & qui sont 1. $3d$, $3dd$; je prens aussi le dernier terme d^3 & je le multiplie par le nombre des termes de la progression donnée, lequel dans cet exemple est 4, ce qui fait $4d^3$; ainsi j'ai les grandeurs 1, $3d$, $3dd$, $4d^3$, que je prens pour guide en cette sorte. Je regarde la premiere comme représentant le cube a^3 du premier terme de la progression, parce que j'ai élevé x au cube x^3; la seconde $3d$, comme représentant la somme des quarrés que je cherche multipliée par $3d$ ou par le triple de la différence d de la progression; la troisiéme $3dd$, comme représentant la somme des termes de la progression multipliée par $3dd$ ou par le triple du quarré de la différence, enfin la quatriéme $4d^3$ comme représentant le cube d^3 de la difference multiplié par 4 ou par le nombre des termes de la progression. Cela fait, je retranche du cube x^3 1°. le cube du premier terme de la progression à cause de la grandeur 1 qui me represente ce cube. 2°. La somme des termes de la progression multipliée par $3dd$ à cause de la troisiéme grandeur $3dd$, & enfin le cube d^3 de la différence multipliée par 4 ou par le nombre des termes; après quoi comme il ne me reste plus que la seconde grandeur $3d$ qui represente la somme des quarrés, multipliée par $3d$, je divise ce qui reste par $3d$, & le quotient est la somme des quarrés cherchés.

De même si je cherche la somme des cubes de la progression, je prens le terme x qui viendroit immédiatement après le dernier si la progression étoit continuée, & je l'éleve à un degré plus haut que les cubes que je cherche, c'est-à-dire, au quatriéme degré, ce qui donne x^4. Or $x = f + d$, donc $x^4 = f^4 + 4f^3d + 6ffdd + 4fd^3 + d^4$. Je prens les coefficiens 1, $4d$, $6dd$, $4d^3$ des puissances de f dans le second membre de cette équation, & le dernier terme d^4 que je multiplie par le nombre des termes, 4 ce qui fait $4d^4$, & j'ai les grandeurs 1, $4d$, $6dd$, $4d^3$, $4d^4$, donc je regarde la premiere comme représentant la quatriéme puissance a^4 du premier terme de la progression à cause que x a été élevé à

cette puissance, la seconde $4d$ comme representant les cubes que je cherche multipliés par $4d$; la troisiéme $6dd$ comme représentant la somme des quarrés, multipliée par $6dd$, la quatriéme $4d^3$ comme représentant la somme des termes multipliée par $4d^3$, & la cinquiéme $4d^4$ comme représentant la quatriéme puissance de la difference multipliée par le nombre des termes 4; c'est pourquoi je retranche de x^4, 1°. la quatriéme puissance a^4 du premier terme de la progression à cause de la premiere grandeur 1. 2°. La somme des quarrés des termes de la progression multipliée par $6dd$ à cause de la troisiéme grandeur $6dd$. 3°. La somme des termes de la progression multipliée par $4d^3$ à cause de la quatriéme grandeur $4d^3$, & enfin la quatriéme puissance d^4 de la difference d multipliée par le nombre des termes 4, à cause de la cinquiéme grandeur $4d^4$, après quoi comme il ne me reste plus que la grandeur $4d$ qui représente la somme des cubes multipliée par 4 fois la différence, je divise mon reste par $4d$ & le quotient est la somme des cubes cherchés.

De même encore, si je cherche la somme des quatriémes puissances de la progression, je prens le terme x qui viendroit immédiatement après le dernier, & je l'éleve à la puissance x^5 élevée d'un degré plus haut que les quatriémes puissances que je cherche. Or $x = f + d$, donc $x^5 = f^5 + 5f^4d + 10f^3dd + 10ffd^3 + 5fd^4 + d^5$, les coefficiens des puissances de f dans le second membre sont $1, 5d, 10dd, 10d^3, 5d^4$, & le dernier terme multiplié par le nombre des termes 4 [illegible] $4d^5$, ainsi j'ai les 6 grandeurs $1, 5d, 10dd, 10d^3, 5d^4, 4d^5$, dont je regarde la premiere 1 comme representant le premier terme de la progression élevé à la même puissance que x; la seconde $5d$, comme representant les quatriémes que je cherche multipliées par $5d$; la troisiéme $10dd$, comme representant les cubes multipliés par $10dd$; la quatriéme $10d^3$, comme representant les quarrés multipliés par $10d^3$; le cinquiéme $5d^4$; comme representant la somme des termes de la progression multipliée par $5d^4$; & le sixiéme $4d^5$, comme representant la cinquiéme puissance de la difference d multiplié par le nombre des termes 4; c'est pourquoi je retranche de x^5. 1°. La cinquiéme puissance du premier terme a de la progression à cause de la premiere grandeur 1; 2°. la somme des cubes multipliées par $10dd$ à cause de la troisiéme grandeur $10dd$; 3°. la somme des quarrés multipliée par $10d^3$ à cause de la quatriéme grandeur $10d^3$; 4°. la somme des termes de la progression multipliée par $5d^4$ à

cause de la cinquiéme grandeur $5d^4$; 5°. la cinquiéme puissance de la difference d multipliée par le nombre des termes 4; après quoi comme il ne me reste plus que la seconde grandeur $5d$ qui represente la somme des quatriémes puissances multipliée par $5d$; je divise mon reste par $5d$, & le quotient est la somme cherchée des quatriémes puissances, & on feroit la même chose si l'on cherchoit la somme des puissances plus élevées.

De façon que la premiere des grandeurs qu'on prend pour guides, represente toujours une puissance du premier terme a de la progression élevée au même degré que x que les autres grandeurs à l'exception de la derniere, représentent les puissances descendantes des termes de la progression depuis le degré que l'on cherche jusqu'aux premiers multipliées par les quantités que les grandeurs représentent, que la derniere grandeur représente toujours la différence d élevée au même degré que x, & multipliée par le nombre des termes, que toutes les grandeurs, à l'exception de la seconde, représentent ce qu'il faut retrancher de x élevé à une puissance plus grande d'un degré que celle que l'on cherche, & enfin que la seconde grandeur fait voir quel est le diviseur qui doit diviser le reste pour avoir la somme des puissances cherchées.

Si l'on se donne la peine de mettre des nombres au lieu des lettres, & de faire les calculs que nous venons d'indiquer, on ne manquera pas de se convaincre de la vérité de ce Problême. Cependant en voici la démonstration.

Quand nous cherchons la somme des quarrés de la progression Arithmétique ascendante a, b, c, f, dont la différence est d, le cube du terme x qui viendroit immédiatement après le dernier, si la progression étoit continuée est x^3, & il est clair que $x^3 = x^3 - f^3 + f^3 - c^3 + c^3 - b^3 + b^3 - a^3 + a^3$, à cause que tous les termes du second membre se détruisent par des signes contraires à l'exception de x^3, qui par conséquent est égal au terme x^3 du premier membre. Or $x = f + d$, donc $x^3 = f^3 + 3ffd + 3fdd + d^3$, & partant $x^3 - f^3 = 3ffd + 3fdd + d^3$, de même $f = c + d$, donc $f^3 = c^3 + 3ccd + 3cdd + d^3$, & $f^3 - c^3 = 3ccd + 3cdd + d^3$, de même encore $c = b + d$, donc $c^3 = b^3 + 3bbd + 3bdd + d^3$, & $c^3 - b^3 = 3bbd + 3bdd + d^3$; enfin $b = a + d$, donc $b^3 = a^3 + 3aad + 3add + d^3$, & partant $b^3 - a^3 = 3aad + 3add + d^3$, substituant donc dans notre équation $x^3 = x^3 - f^3 + f^3 - c^3 + c^3 - b^3 + b^3 - a^3 + a^3$, les valeurs de $x^3 - f^3$,

$f^3 - c^3$, $c^3 - b^3$ & $b^3 - a^3$, que nous venons de trouver, nous aurons :

$$x^3 = \begin{array}{l} 3ffd + 3fdd + d^3 \\ + 3ccd + 3cdd + d^3 \\ + 3bbd + 3bdd + d^3 \\ + 3aad + 3add + d^3 \\ + a^3 \end{array}$$

Ce qui fait voir que le cube x^3 contient 1°. le cube a^3 du premier terme de la progression, 2°. la somme des quarrés aa, bb, cc, ff de la progression multipliés par $3d$, 3°, la somme des termes a, b, c, f, multipliés par $3dd$. 4°. Le cube d^3 de la différence d pris quatre fois ou multiplié par le nombre des termes 4 ; donc si de x^3 nous retranchons le cube a^3, plus la somme $a + b + c + d$ multipliée par $3dd$, & enfin le cube d^3 pris 4 fois, c'est-à-dire $4d^3$, le reste sera la somme des quarrés multipliés par $3d$, & par conséquent en divisant par $3d$, nous aurons la somme des quarrés. Or les grandeurs que nous avons prises pour guides ci-dessus, nous ont indiqué de faire les mêmes opérations, donc elles ont prescrit ce qu'il falloit faire.

De même quand nous cherchons la somme des cubes de la progression a, b, c, f, la quatriéme puissance de x est x^4, & nous avons $x^4 = x^4 - f^4 + f^4 - c^4 + c^4 - b^4 + b^4 - a^4 + a^4$; or $x = f + d$, donc $x^4 = f^4 + 4f^3d + 6ffdd + 4fd^3 + d^4$, & partant $x^4 - f^4 = 4f^3d + 6ffdd + 4fd^3 + d^4$, de même $f = c + d$, donc $f^4 = c^4 + 4c^3d + 6ccdd + 4cd^3 + d^4$, & $f^4 - c^4 = 4c^3d + 6ccdd + 4cd^3 + d^4$, de même encore $c = b + d$, donc $c^4 = b^4 + 4b^3d + 6bbdd + 4bd^3 + d^4$, & partant $c^4 - b^4 = 4b^3d + 6bbdd + 4bd^3 + d^4$; enfin $b = a + d$, donc $b^4 = a^4 + 4a^3d + 6aadd + 4ad^3 + d^4$, & par conséquent $b^4 - a^4 = 4a^3d + 6aadd + 4ad^3 + d^4$, substituant donc dans notre équation $x^4 = x^4 - f^4 + f^4 - c^4 + c^4 - b^4 + b^4 - a^4 + a^4$, les valeurs de $x^4 - f^4$, $f^4 - c^4$, $c^4 - b^4$, & $b^4 - a^4$ que nous venons de trouver, nous aurons:

$$x^4 = \begin{array}{l} 4f^3d + 6ffdd + 4fd^3 + d^4 \\ + 4c^3d + 6ccdd + 4cd^3 + d^4 \\ + 4b^3d + 6bbdd + 4bd^3 + d^4 \\ + 4a^3d + 6aadd + 4ad^3 + d^4 \\ + a^4 \end{array}$$

Ce qui fait voir que x^4 contient 1°. la quatriéme puissance a^4 du premier terme a de la progression. 2°. Les cubes a^3, b^3, c^3, f^3 multipliés par $4d$. 3°. Les quarrés aa, bb, cc, ff multipliés par $6dd$. 4°. La somme des termes a, b, c, f multipliés par $4d^3$. 5°. Enfin

la quatriéme puissance d^4 de la différence d prise 4 fois, c'est-à-dire multipliée par le nombre des termes 4. Donc si de x^4 on retranche la quatriéme puissance a^4, plus les quarrés multipliés par $6dd$, plus la somme des termes multipliée par $4d^3$, & enfin $4d^4$, le reste sera la somme des cubes multipliée par $4d$, & par conséquent en divisant ce reste par $4d$, le quotient sera la somme des cubes. Or les grandeurs que nous avons prises pour guides ci-dessus, nous ont indiqué les mêmes opérations ; donc elles ont prescrit ce qu'il falloit faire ; & on démontrera la même chose à l'égard des puissances plus élevées.

6. *Remarque.* J'ai dis au sujet des piles de boulets (Livre Ier *N.* 167.), que si l'on prend un nombre de termes fini dans la suite o. 1. 2. 3. 4. 5, &c. des nombres naturels, & que l'on fasse les quarrés des termes qu'on aura pris, la somme de ces quarrés est au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 est à 3, plus comme 1 est à la racine du plus grand multipliée par 6 ; & delà j'ai tiré une formule aisée pour trouver la somme des boulets contenus dans une pyramide ou pile quarrée. Or comme je ne l'ai démontré que par induction, & que bien des gens ne veulent point mettre les preuves par induction au rang des preuves Géométriques ; je vais le démontrer en rigueur, en suivant ce qui vient d'être dit, ce qui fera voir en même-tems l'accord des principes.

Soient donc les termes o. a. b. c. x, dont le dernier est x, & la différence est 1, le nombre des termes sera donc $x+1$, à cause que la progression commence par zero, & les quarrés seront o, a^2, b^2, c^2, x^2 ; ainsi le dernier terme multiplié par le nombre des termes $x+1$ sera x^3+x^2. Or le terme qui viendroit immédiatement après le dernier x, si l'on continuoit, la progression est $x+1$, & son cube est $x^3+3xx+3x+1$; donc prenant dans ce cube les coefficiens 1. 3. 3 des puissances de x, & multipliant le dernier terme 1 par le nombre des termes $x+1$, ce qui fait $x+1$, les quatre grandeurs 1. 3. 3. $x+1$, me font voir qu'il faut retrancher du cube $x^3+3xx+3x+1$: premierement, le cube du premier terme o, lequel n'est rien ; secondement, la somme des termes multipliée par 3 ; troisiémement, le cube de la différence 1 multipliée par le nombre des termes ; & enfin, diviser le reste par trois, ce qui me donnera au quotient la somme des quarrés. Or la somme des termes est $\frac{xx+x}{2}$, c'est-à-dire, le dernier

terme

terme x, & le premier zero multipliés par la moitié $\frac{x+1}{2}$ du nombre des termes $x+1$; multipliant donc cette somme par 3, nous aurons $\frac{3xx+3x}{2}$, ce qui étant retranché du cube $x^3+3xx+3x+1$, nous laissera un reste $x^3+\frac{3xx}{2}+\frac{3x}{2}+1$, & retranchant encore de ce reste le cube de la différence multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire retranchant $x+1$, le reste sera $x^3+\frac{3xx}{2}+\frac{x}{2}$, ou $x^3+x^2+\frac{xx+x}{2}$; ainsi divisant ce reste par 3 le quotient $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{xx+x}{6}$ sera la somme des quarrés; or en multipliant le dessus & le dessous de la seconde fraction par x, ce qui n'en altere point la valeur, la somme des quarrés est $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$, & cette somme est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire à x^3+x^2, comme $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$ est à x^3+x^2, ou comme $\frac{1}{3}+\frac{1}{6x}$ est à 1; donc la somme des quarrés est au dernier quarré multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 est à $6x$.

Maintenant puisque la somme des quarrés est $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{xx+x}{6}$ si nous multiplions le dessus & le dessous de la premiere fraction par 2, nous aurons $\frac{2x^3+2x^2+x^2+x}{6}$, ou $\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$ qui est la même formule générale que nous avons trouvée dans l'endroit cité (*Liv. I. N. 267.*) ce qui fait voir que l'induction dont nous nous sommes servi en cet endroit, nous a conduit à la découverte de la vérité.

On pourroit trouver de la même façon des formules pour avoir la somme des cubes, des quatriémes puissances, des cinquiémes, &c. des termes d'une progression finie 0. 1. 2. 3, &c. mais comme ces formules deviendroient trop compliquées, & que d'ailleurs la méthode de ce Problême est plus générale, nous n'en dirons rien de peur de nous écarter de notre sujet.

Observations touchant les nombres infinis.

7. On dit qu'un nombre *a* est *partie aliquote* d'un autre nombre *b*, lorsqu'il est contenu exactement un certain nombre de fois dans *b*.

8. *Une partie aliquote* a *d'un nombre* b, *est d'autant plus petite qu'elle est contenuë plus de fois dans* b ; cela est évident, car si *a* est contenu trois fois dans *b*, il est certainement plus petit que s'il n'y étoit contenu que deux fois.

9. Donc si un nombre *a* est contenu dans un autre nombre *b* plus de fois qu'on ne peut l'exprimer par un nombre quelconque quelque grand qu'il puisse être, ce nombre *a* est une partie aliquote *infiniment petite* de *b*.

10. *Un nombre* a *qui est partie aliquote infiniment petite d'un autre nombre* b, *n'est rien à l'égard de* b ; car il est moindre à l'égard de *b*, que la plus petite partie aliquote de *b* que l'on puisse exprimer & concevoir.

11. Donc un nombre *b* augmenté ou diminué d'une partie aliquote infiniment petite *a*, n'est pas différent de ce qu'il étoit avant l'augmentation ou la diminution, puisque la différence qu'il peut y avoir est plus petite que la moindre partie aliquote de *b* que l'on puisse concevoir.

12. Donc si deux nombres *b* & *c* ne different entr'eux que d'une grandeur *a* infiniment petite à l'égard de l'un & de l'autre, ils sont parfaitement égaux entr'eux.

13. On dit qu'un nombre *x* est *infini*, lorsqu'il contient un nombre quelconque *a* connu & déterminé plus de fois qu'on ne peut l'exprimer par un nombre quelque grand qu'il puisse être.

14. Donc tout nombre connu & déterminé quelque grand qu'il puisse être, est une partie aliquote infiniment petite d'un nombre infini *x*.

15. *Le produit* ab *de deux nombres* a, b, *déterminés quelques grands qu'ils puissent être est infiniment petit par rapport à un nombre infini* x ; car le nombre déterminé *a* est contenu dans le produit *ab* un nombre de fois qu'on peut exprimer par le nombre déterminé *b*, & par conséquent le produit *ab* n'étant pas infini, n'est qu'une partie aliquote infiniment petite du nombre infini *x*.

16. Donc si on multiplie une partie infiniment petite *a*, d'un nombre infini *x* par un nombre déterminé *b*, quelque grand qu'il puisse être, le produit *ab* est encore infiniment petit par rapport à *x*.

17. *Toute partie aliquote qu'on peut exprimer d'un nombre infini* x, *est encore infiniment grande quelque petite qu'elle puisse être à l'égard de* x. Soit *y* la partie aliquote de *x*, & *a* le nombre qui marque combien de fois *y* est dans *x* ; donc le produit *ya* de *y* par *a* sera

égal à x, & par conféquent infini : or le nombre a étant déterminé puifqu'on peut l'exprimer, eft contenu dans l'infini x ou ya plus de fois que le plus grand nombre imaginable ne peut l'exprimer (*N.* 13.); donc la grandeur y qui marque combien de fois a eft contenu dans ya, eft plus grande que le plus grand nombre qu'on puiffe concevoir, & par conféquent y eft infini.

18. *Tout nombre infini* x *eft infiniment petit par rapport à fon quarré* xx *; fon quarré* xx *eft infiniment petit par rapport à fon cube* x^3 *; fon cube* x^3 *eft infiniment petit par rapport à fa quatriéme puiffance* x^4, *& ainfi de fuite.* Le quarré xx n'eft autre chofe que le nombre infini x multiplié par lui-même, ou pris autant de fois qu'il contient d'unités ; or le nombre d'unités que x contient eft plus grand qu'on ne peut l'exprimer par un nombre quelconque quelque grand qu'il puiffe être, donc x eft contenu dans xx plus de fois qu'on ne peut l'exprimer, & par conféquent il eft partie aliquote infiniment petite de xx (*N.* 9.). De même le cube x^3 n'eft autre chofe que le quarré xx multiplié par x, ou pris autant de fois qu'il y a d'unités dans x, donc xx eft dans x^3 plus de fois qu'on ne peut peut l'exprimer, & par conféquent il eft infiniment petit par rapport à x^3, & on prouvera la même chofe à l'égard des puiffances fupérieures de x.

19. Il y a donc des infiniment petits d'infiniment petits à l'infini : par exemple tout nombre connu & déterminé étant infiniment petit par rapporr à un nombre infini x, lequel eft infiniment petit par rapport à fon quarré. Il eft clair que tout nombre connu a eft par rapport au quarré xx, un infiniment petit d'un infiniment petit x, ou un infiniment petit du fecond genre, & par la même raifon tout nombre connu a eft par rapport à x^3 un infiniment petit d'un infiniment petit x d'un autre infiniment petit xx, c'eft-à-dire a eft un infiniment petit du troifiéme genre, &c.

20. *Avertissement.* Avant d'aller plus loin il eft bon qu'on fe rappelle ici ce que nous avons dit touchant le Calcul des Expofans (*Liv. I. N.* 153. 154., *&c.*) fçavoir 1°. Que les puiffances afcendantes d'une grandeur a font a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, &c. qui ont pour expofans les nombres 1, 2, 3, 4, &c. 2°. Que fi l'on divife la premiere puiffance a^1 par elle-même, on aura $a^0 = 1$ dont l'expofant eft zero. 3°. Que pour multiplier une puiffance a^2 par un autre a^3, il n'y a qu'à ajouter les expofans 2 & 3 enfemble, ce qui fait 5, & écrire a^5 pour le produit. 4°. Que pour divifer une puiffance a^6 par une autre a^3, il faut retrancher de

l'exposant 6 du dividende l'exposant 3 du diviseur, ce qui donne 3 & écrire a^3 pour le quotient. 5°. Que pour élever une puissance quelconque a^2 à une autre puissance, par exemple à la troisiéme, il faut multiplier l'exposant 2 de a^2 par l'exposant 3 de la puissance à laquelle on veut élever a^2, ce qui fait 6, & écrire a^6. 6°. Que pour tirer la racine quelconque par exemple la racine troisiéme d'une puissance a^6, il faut diviser l'exposant 6 de la puissance a^6 par l'exposant 3 de la racine qu'on veut tirer, ce qui fait 2, & écrire a^2. 6°. Enfin que les racines 2e. 3e. 4e, &c. de a^1 s'expriment par $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, &c. qui ont pour exposans $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. de même que les racines 3e, 4e, 5e, &c. de a^2 s'expriment par $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{2}{4}}$, $a^{\frac{2}{5}}$, &c. & ainsi des autres; de façon que quand l'exposant de a est une fraction quelconque, par exemple $\frac{3}{4}$, le numérateur 3 represente la puissance à laquelle la grandeur a est élevée, & le dénominateur 4 represente la racine qu'on veut extraire de cette puissance a^3.

21. *Definition*. Si l'on prend la suite infinie des nombres naturels 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6, &c. x qui commence par zero, & qui se termine à l'infini x, l'exposant de cette suite sera 1, à cause que chaque terme de cette suite est au premier dégré, l'exposant de la suite des quarrés de ces mêmes nombres sera 2, à cause que chaque terme est au second dégré, l'exposant de la suite de leurs cubes sera 3, & ainsi de suite. De même l'exposant de la suite de leurs racines quarrées sera $\frac{1}{2}$, celui de la suite de leurs racines cubiques sera $\frac{1}{3}$, &c. & si l'on divise chacun des termes de la suite 0. 1. 2. 3, &c. par lui-même, on aura une suite infinie d'unités 1, 1, 1, 1, &c. dont l'exposant sera zero, parce qu'une premiere puissance a divisée par elle-même est a^0, dont l'exposant est zero.

Dans toutes ces suites le nombre des termes sera toujours $x+1$, c'est-à-dire le dernier terme x de la premiere suite 0. 1. 2. 3. 4. 5, &c. x, augmenté de l'unité; car si la progression commençoit par 1, il est clair que le dernier terme x seroit égal au nombre des termes, mais comme elle commence par zero, ce qui donne un terme de plus, ls nombre des termes doit être $x+1$.

22. Proposition Ire. *Si l'on prend la suite infinie des nombres naturels* 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6, *&c.* x *celle des quarrés de ces nombres, celle de leurs cubes, celle de leurs quatriémes puissances, & ainsi de suite à l'infini. La somme de chacune de ces suites sera toujours au*

dernier & plus grand terme multiplié par le nombre des termes comme 1 est à l'exposant de la suite augmenté de l'unité.

La suite 0. 1. 2. 3. 4, &c. x étant une progression arithmétique, sa somme se trouve en ajoutant le premier terme au dernier, & multipliant la somme $0+x$ par la moitié du nombre des termes $x+1$, c'est-à-dire par $\frac{x+1}{2}$ (*Liv. I. N.* 251.); donc la somme des termes est $\frac{xx+x}{2}$, ou bien $\frac{xx}{2}$, à cause que x étant infiniment petit à l'égard de xx (*N.* 18.) n'est par conséquent rien par rapport à xx; or le dernier terme x multiplié par le nombre des termes $x+1$ est $xx+x$, ou xx par la raison que nous venons de dire; donc la somme des termes est au dernier multiplié par le nombre des termes comme $\frac{xx}{2}$ est à xx, ou comme $\frac{1}{2}$ est à 1, ou comme 1 est à 2, c'est-à-dire comme l'unité est à l'exposant 1 de la suite augmenté de l'unité.

Dans la suite des quarrés des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. x le dernier quarré xx multiplié par le nombre des termes $x+1$ est x^3+x^2, ou simplement x^3, à cause que x^2 est infiniment petit par rapport à x^3 (*N.* 18.); or pour avoir la somme des quarrés, je prens le terme $x+1$ qui viendroit après le dernier terme si la progression pouvoit être continuée, & suivant les regles données ci-dessus (*N.* 5.) j'élève $x+1$ au cube, ce qui donne x^3+3x^2+3x+1, ou simplement x^3; car x^2 étant infiniment petit par rapport à x^3 (*N.* 18.) le terme $3x^2$ est encore infiniment petit (*N.* 16.) & par la même raison les termes $3x$ & 1 sont aussi infiniment petits par rapport à x^3; ainsi le cube du terme $x+1$, n'est pas différent du quarré xx multiplié par le nombre des termes. Maintenant les coëfficiens de x dans x^3+3x^2+3x+1, sont 1, 3, 3, & le dernier terme 1 multiplié par le nombre des termes est $x+1$ qui me font voir que pour avoir la somme des quarrés il faut que je retranche du cube de $x+1$, ou du quarré xx multiplié par le nombre des termes, 1°. le cube du premier terme 0 de la progression, lequel n'est rien; 2°. la somme des termes $\frac{x^2+x}{2}$, ou $\frac{x^2}{2}$ multiplié par 3, c'est-à-dire $\frac{3x^2}{2}$, ce qui est infiniment petit à l'égard de x^3+x^2, ou simplement de x^3 (*N.* 18. 16.); 3°. le terme $x+1$ qui n'est encore rien à l'égard de x^3 ou du quarré xx multiplié par le nombre des termes; donc après ces soustractions, le cube de $x+1$, ou le quarré xx multiplié par le nombre des ter-

mes ne sera pas différent de ce qu'il étoit; or la seconde grandeur 3 me fait voir qu'il faut enfin diviser le reste par 3; donc en divisant par 3 le cube de $x+1$, ou le quarré xx multiplié par le nombre des termes, le quotient $\frac{x^3}{3}$ sera la somme des termes & par conséquent cette somme sera au dernier quarré multipliée par le nombre des termes, c'est-à-dire à x^3 comme $\frac{x^3}{3}$ est à x^3, ou comme $\frac{1}{3}$ est à 1, ou comme 1 est à 3, c'est-à-dire comme 1 est à l'exposant 2 de la suite des quarrés augmenté de l'unité.

Dans la suite des cubes des nombres 0. 1. 2. 3. 4. 5, &c. x, le dernier cube x^3 multiplié par le nombre des termes $x+1$ est x^4+x^3, ou simplement x^4, à cause que x^3 est infiniment petit à l'égard de x^4 (*N.* 18.) or pour avoir la somme des cubes selon les regles ci-dessus (*N.* 5.), je prens le terme $x+1$ qui viendroit après le dernier terme x, & je l'éleve à la quatriéme puissance, laquelle est $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$, ou simplement x^4; car x^3 étant infiniment petit par rapport à x^4, le second terme $4x^3$ est encore infiniment petit par rapport à x^4 (*N.* 16.) & quant aux autres termes $6x^2$, $4x^2$, & 1, il est visible qu'ils sont des infiniments petits d'infiniment petits (*N.* 19.) & que par conséquent ils sont, pour ainsi dire, moins que rien par rapport à x^4; ainsi la quatriéme puissance du terme $x+1$ n'est pas différente du dernier cube x^3 multiplié par le nombre des termes: or les coëfficiens de x dans $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ sont 1, 4, 6, 4, & le dernier terme 1 multiplié par le nombre des termes est $x+1$. J'ai donc cinq grandeurs 1, 4, 6, 4, $x+1$ qui me font voir qu'il faut que je retranche de la quatriéme puissance de $x+1$, ou du dernier cube multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire, de x^4, 1°. la quatriéme puissance du premier terme 0, de la progression, laquelle n'est rien. 2°. La somme $\frac{x^3}{3}$ des quarrés multipliée par 6, c'est-à-dire $\frac{6x^3}{3}$, ou $2x^3$, ce qui est infiniment petit par rapport à x^4. 3°. La somme $\frac{x^2}{2}$ de la progression multipliée par 4, ou $\frac{4x^2}{2}$, ou $2x^2$, ce qui est un infiniment petit d'infiniment petit par rapport à x^4, & enfin le terme $x+1$ qui est un infiniment petit du troisiéme genre par rapport à x^4; donc après toutes ces soustractions x^4 ne différera pas de ce qu'il étoit auparavant: or à cause de la seconde grandeur 4, il faut diviser

le reste par 4 pour avoir la somme des cubes ; divisant donc x^4 par 4, la somme des cubes sera $\frac{x^4}{4}$, & cette somme sera au dernier cube x^3 multiplié par le nombre des termes comme $\frac{x^4}{4}$ est à x^4, ou comme $\frac{1}{4}$ est à 1, ou comme 1 à 4, c'est-à-dire comme 1 est à l'exposant 3 de la suite des cubes augmenté de l'unité.

Et la même chose se démontreroit à l'égard des suites des quatriémes puissances, des cinquiémes, &c.

23. COROLLAIRE I. Si l'on divise tous les termes de la suite 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. x, chacun par lui-même, il est clair qu'on aura une suite infinie d'unités, & que cette suite sera au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 1 ; or l'exposant de cette suite d'unités est zero (*N.* 21.), donc la somme sera encore au dernier terme multipliée par le nombre des termes comme 1 est à l'exposant zero augmenté de l'unité.

Nous nommerons *Suite des égaux* la suite composée d'unités.

24. COROLLAIRE II. Les rapports de la suite des égaux, de celle des premieres puissances, de celle des cubes, des quatriémes puissances, &c. à leurs derniers termes multipliés par le nombre des termes sont donc $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c. ainsi quand les exposans 0, 1, 2, 3, 4, &c. de ces différentes suites sont en progression arithmétique, les rapports de ces différentes suites à leurs derniers termes multipliés par le nombre des termes, sont des fractions qui ont toutes l'unité pour numérateur, & dont les dénominateurs 1, 2, 3, 4, 5, &c. sont aussi en progression arithmétique.

25. PROPOSITION II. *Si l'on prend la suite des racines quarrées des nombres* 0, 1, 2, 3, 4, 5, *&c.* x, *qui se terminent à l'infini* x, *la suites de leurs racines cubiques, celles de leurs racines quatriémes, & ainsi de suite, le rapport de chacune de ces suites à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes sera comme* 1 *à l'exposant de la suite augmenté de l'unité.*

La suite des racines quarrées a pour exposant $\frac{1}{2}$, & cet exposant est moyen arithmétique entre l'exposant 0 de la suite des égaux, & l'exposant 1 de la suite des premieres puissances 0, 1, 2, 3, 4, &c. x ; donc le dénominateur du rapport de la suite des racines au dernier terme multiplié par le nombre des termes, doit être moyen arithmétique entre le dénominateur 1 du rapport $\frac{1}{1}$ de la suite des égaux, & le dénominateur 2 du rapport $\frac{1}{2}$ de la suite des premieres puissances (*N.* 24.) prenant donc un moyen

arithmétique entre 1 & 2, lequel est $\frac{3}{2}$, le rapport de la suite des racines quarrées à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes sera comme 1 est à $\frac{3}{2}$, ou comme 1 est à l'exposant $\frac{1}{2}$ augmenté de l'unité; car $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, & ce rapport peut se changer en celui de 2 à 3, car 1 est à $\frac{3}{2}$ comme $\frac{2}{2}$ est à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3.

De même l'exposant de la suite des racines cubiques est $\frac{1}{3}$, & cet exposant est le premier des deux moyens arithmétiques entre l'exposant 0 de la suite des égaux, & l'exposant 1 de la suite des premieres puissances 0, 1, 2, 3, &c. x; car les deux moyens arithmétiques entre 0 & 1 sont $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, donc le dénominateur du rapport des racines cubiques à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, doit être le premier de deux moyens arithmétiques entre le dénominateur 1 du rapport des égaux & le dénominateur 2 du rapport des premieres puissances (*N.* 24.); prenant donc deux moyens arithmétiques $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ entre 1 & 2, le rapport de la suite des racines cubiques à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes est comme 1 est à $\frac{4}{3}$, ou comme 1 est à l'exposant $\frac{1}{3}$ de la suite augmenté de l'unité; car $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$, & ce rapport peut se changer en celui de 3 à 4; car 1 est à $\frac{4}{3}$, comme $\frac{3}{3}$ est à $\frac{4}{3}$, comme 3 à 4.

De même encore l'exposant de la suite des quatriémes racines des nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c. x est $\frac{1}{4}$, & cet exposant est le premier de trois moyens arithmétiques $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, entre l'exposant 0 de la suite des égaux, & l'exposant 1 de la suite 0, 1, 2, 3, 4, &c. x; donc le dénominateur du rapport de la suite des quatriémes puissances à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes doit être le premier de trois moyens arithmétiques entre le dénominateur 1 du rapport de la suite des égaux, & le dénominateur 2 du rapport de la suite 0, 1, 2, &c. x (*N.* 24.); prenant donc trois moyens arithmétiques $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, entre 1 & 2, le rapport de la suite des quatriémes racines à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes est comme 1 est à $\frac{5}{4}$, c'est-à-dire comme 1 est à l'exposant $\frac{1}{4}$ augmenté de l'unité; car $\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, & ce rapport peut se changer en celui de 4 à 5, à cause que 1 est à $\frac{5}{4}$ comme $\frac{4}{4}$ est à $\frac{5}{4}$, ou comme 4 à 5, & on prouvera la même chose à l'égard des autres racines.

26. Corollaire I. Si l'on multiplie les termes de quelqu'une des suites dont nous venons de parler, par exemple les termes de la suite des quarrés qui ont pour exposant 2 par les termes d'une

d'une autre ſuite, par exemple, par les termes de celle des cubes qui ont pour expoſant 3, on aura une autre ſuite qui aura pour expoſant la ſomme des expoſans 2 & 3 (*N.* 20.) ainſi les termes de cette ſuite étant les cinquiémes puiſſances, le rapport de leur ſomme au dernier terme multipliée par le nombre des termes, ſera comme 1 eſt à l'expoſant 5 augmenté de l'unité, c'eſt-à-dire comme 1 à 6 (*N.* 22.) & ainſi des autres.

De même ſi l'on diviſe les termes d'une ſuite, par exemple, de la ſuite des cinquiémes puiſſances qui a pour expoſant 5 par les termes d'une autre ſuite dont l'expoſant eſt moindre que 5; par exemple par les termes de la ſuite des cubes dont l'expoſant eſt 3, on aura une nouvelle ſuite dont l'expoſant poſitif 2 ſera la différence des deux expoſans 5 & 3 (*N.* 20.) & par conſéquent les termes de cette ſuite étant les quarrés, le rapport de leur ſomme à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, ſera comme 1 eſt à l'expoſant 2 augmenté de l'unité, ou comme 1 eſt à 3 (*N.* 22.) & ainſi des autres.

27. Corollaire II. Mais ſi l'on diviſe les termes d'une ſuite par les termes d'une autre qui ait un expoſant plus grand, par exemple, les termes de la ſuite o. 1. 2. 3, &c. x, dont l'expoſant eſt 1 par les termes des quarrés dont l'expoſant eſt 2, ou par ceux des cubes dont l'expoſant eſt 3, ou par ceux des quatriémes puiſſances, &c. on aura alors des nouvelles ſuites qui auront des expoſans négatifs 1—2, 1—3, 1—4, &c. (*N.* 20.), ou —1, —2, —3, —4, &c. & le rapport de la ſomme de chacune de ces ſuites à ſon dernier terme ſera toujours comme 1 eſt à l'expoſant augmenté de l'unité; car les expoſans de ces ſuites formeront avec l'expoſant o de la ſuite des égaux une progreſſion arithmétique négative o, —1, —2, —3, —4, &c. & par conſéquent les dénominateurs de leur rapport devront auſſi former une progreſſion arithmétique négative, dont le premier ſera le dénominateur 1 du rapport des égaux, & c'eſt ce qui arrive effectivement; car le rapport de la ſuite qui a pour expoſant —1 à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes étant comme 1 eſt à l'expoſant —1 augmenté de l'unité eſt $\frac{1}{0}$; celui de la ſuite qui a pour expoſant —2 étant comme 1 eſt à l'expoſant —2 augmenté de l'unité eſt $\frac{1}{-1}$, celui de la ſuite qui a pour expoſant —3, étant comme 1 à l'expoſant —3 augmenté de l'unité eſt $\frac{1}{-2}$, &c. donc le raport $\frac{1}{1}$ des égaux, & les raports des

fuites négatives font $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{-1}$, $\frac{1}{-2}$, $\frac{1}{-3}$, $\frac{1}{-4}$, &c. & il eft vifible que leurs dénominateurs forment une progreffion arithmétique négative ; de même que les expofans des fuites.

28. Il faut obferver que les termes de toute fuite dont l'expofant eft négatif, font réciproques aux termes de la fuite dont l'expofant pofitif eft le même nombre que celui de l'expofant négatif. Nommons o, a, b, c, d, &c. x, les termes de la fuite o. 1. 2. 3. 4, &c. x, la fuite des quarrés fera donc o^2, a^2, b^2, c^2, d^2, &c. xx, & la fuite négative qui aura le même expofant 2, fera o^{-2}, a^{-2}, b^{-2}, c^{-2}, d^{-2}, &c. x^{-2} ; or cette fuite peut s'exprimer en cette forte $\frac{1}{o^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{d^2}$, &c. $\frac{1}{x^2}$, ainfi que nous l'avons dit en parlant du Calcul des expofans (*Liv. I. N.* 161.) & la fuite o^2, a^2, b^2, c^2, d^2, &c. x^2, peut s'exprimer ainfi : $\frac{o^2}{1}$, $\frac{a^2}{1}$, $\frac{b^2}{1}$, $\frac{c^2}{1}$, $\frac{d^2}{1}$, &c. $\frac{x^2}{1}$. Maintenant pour démontrer que les termes de ces deux fuites font réciproques, il n'y a qu'à prendre dans la premiere les deux termes $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, & dans la feconde les termes correfpondans $\frac{a^2}{1}$, $\frac{b^2}{1}$, & faire voir que l'on a cette proportion $\frac{1}{a^2}$. $\frac{1}{b^2}$ :: $\frac{b^2}{1}$. $\frac{a^2}{1}$, ce qui eft aifé, puifqu'en faifant le produit $\frac{a^2}{a^2}$ des extrêmes, & le produit $\frac{b^2}{b^2}$ des moyens, on trouve que ces deux produits font égaux, à caufe de $\frac{a^2}{a^2}=1$, & de $\frac{b^2}{b^2}=1$.

Delà il fuit que les termes de la fuite o^{-2}, a^{-2}, b^{-2}, c^{-2}, d^{-2}, &c. x^{-2}, qui eft la même que la fuite $\frac{1}{o^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{d^2}$; &c. $\frac{1}{x^2}$, vont en diminuant, au lieu que ceux de la fuite réciproque o^2, a^2, b^2, c^2, d^2, &c. x^2, vont en augmentant, & qu'au lieu que le premier terme o^2 de la fuite o^2, a^2, b^2, &c. eft infiniment petit, au contraire le premier terme $\frac{1}{o^2}$ de la fuite $\frac{1}{o^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, &c. eft infiniment grand : car puifque felon les regles de la divifion le quotient devient d'autant plus grand que le divifeur eft moindre, il eft clair que lorfque le divifeur fera infiniment petit ou zero, le quotient doit être infiniment grand, & par conféquent $\frac{1}{o^2}$, c'eft-à-dire 1 divifé par zero doit être infini.

30. De peur qu'on ne prenne pour un paradoxe ce que je viens de dire au sujet de $\frac{1}{0}$, on n'a qu'à faire attention que 1 divisé par 1 donne 1 au quotient; que 1 divisé par $\frac{1}{2}$, donne 2 au quotient; que 1 divisé par $\frac{1}{3}$ donne au quotient 3, &c. c'est-à-dire 1 divisé par une fraction, donne toujours au quotient le dénominateur de la fraction qui sert de diviseur; or on sçait que les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. diminuent d'autant plus, que leurs dénominateurs deviennent grands; donc quand la fraction aura un dénominateur infiniment grand, & que par conséquent elle sera infiniment petite, la grandeur 1 divisée par cette fraction donnera un quotient infiniment grand: mais une fraction infiniment petite n'est rien, puisqu'elle est moindre que tout ce qu'on peut assigner de plus petit: donc elle est égale à zero, & partant 1 divisé par zero est infini.

Application des Principes précédens à la Géométrie.

31. Les élemens AB, CD, &c. d'un triangle MNR (*Fig.* 5.) sont entr'eux comme leurs abscisses MA, MC, &c. car les triangles semblables MAB, MCD, &c. donnent AB. CD :: MA. MC: or les abscisses MA, MC, &c. sont ent'elles comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4. 5, &c. x dont l'exposant est 1; donc la somme des elemens AB, CD, &c. c'est-à-dire le triangle MNR est au dernier élement NR, ou à la base multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur NM, comme 1 est à l'exposant 1 augmenté de l'unité, c'est-à-dire, comme 1 à 2, ce que nous sçavons être véritable par la Geometrie.

32. Si l'on divise le rayon AB d'un cercle (*Fig.* 8.) en une infinité de parties égales, & que du centre A on décrive des circonférences qui passent par les points de division N, M, &c. toutes ces circonférences seront comme leurs rayons AN, AM, &c. ou comme les nombres 0. 1. 2. 3, &c. x dont l'exposant est 1; donc la somme de ces circonférences sera à la plus grande multipliée par le nombre des termes, ou par le rayon AB, comme 1 est à l'exposant 1 augmenté de l'unité, ou comme 1 à 2; or la somme des circonférences n'est pas différente du cercle BCD; donc le cercle est égal à sa circonférence multipliée par la moitié du rayon ou à un triangle qui auroit pour base une ligne droite égale à la circonférence, & pour hauteur le rayon, ce que nous sçavons être vrai par la simple Geometrie.

33. Les plans élementaires PQ, RS, &c. d'une pyramide, (*Fig.* 9.) sont entr'eux comme les quarrés de leurs distances AX, AZ, &c. au sommet A (*Liv. II. N.* 540.) c'est-à-dire, comme les quarrés des abscisses qu'elles occupent sur la hauteur AB de la pyramide, & par conséquent comme les quarrés des nombres o. 1. 2. 3, &c. x, desquels quarrés l'exposant est 2; donc la somme des plans élementaires, ou la pyramide est au plus grand, ou à la base multipliée par le nombre des termes, ou par la hauteur AB, comme 1 est à l'exposant 2 augmenté de l'unité, c'est-à-dire, comme 1 à 3; ainsi la pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur, ce qui est vrai par la Geometrie ordinaire.

34. Si l'on fait tourner un quart de cercle ABC (*Fig.* 10.) autour de son rayon fixe & immobile AC, les élemens perpendiculaires sur AC, décriront des cercles dont la somme sera une demi-sphere, & qui seront entr'eux comme les quarrés des élemens, c'est-à-dire de leurs rayons, & par conséquent comme les rectangles des parties du diamétre que les élemens coupent; or les parties AE, AF, AG, &c. que les élemens coupent du côté de A, sont entr'elles comme la suite infinie o. 1. 2. 3. 4, &c. & les parties restantes EP, FP, &c. sont égales au diamétre AP, moins les parties AE, AF, &c. nommant donc o, a, b, c, d, &c. x, les parties AE, AF, AG, &c. jusqu'à la derniere AC qui est le rayon, & que nous nommons x, le diamétre sera par conséquent $2x$, & les parties EP, FP, GP, &c. seront $2x - o$, $2x - a$, $2x - b$, $2x - c$, $2x - d$, &c. $2x - x$; ainsi multipliant les termes de cette suite par ceux de la suite o, a, b, c, d, &c. x, les produits $2x \times o - oo$, $2xa - aa$, $2xb - bb$, $2xc - cc$, $2xd - dd$, &c. $2xx - xx$, seront la suite des rectangles correspondans aux quarrés des élemens: or cette suite est composée de deux autres, l'une positive, & l'autre négative. La positive est $2x \times o$, $2xa$, $2xb$, $2xc$, $2xd$, &c. $2xx$, & comme dans cette suite les grandeurs o, a, b, c, d, &c. x, se trouvant multipliées par la même quantité $2x$, sont entr'elles comme si elles n'étoient pas multipliées; il s'ensuit que la somme de cette suite est à son dernier terme $2xx$ multiplié par le nombre des termes x, comme 1 à l'exposant 1 de la suite o, a, b, c, &c. augmenté de l'unité, ou comme 1 à 2, c'est-à-dire que cette suite est égale à x^3. La négative est $-o$, $-aa$, $-bb$, $-cc$, $-dd$, &c. $-xx$. & les termes de celle-ci étant comme les quarrés des nombres o. 1. 2. 3, &c. leur

ſomme eſt égale au tiers du dernier terme — xx multiplié par le nombre des termes x; donc la ſomme de la ſuite des rectangles eſt égale au produit de ſon dernier terme $2xx - xx$, c'eſt-à-dire xx multiplié par le nombre des termes, moins le tiers de ce produit: or les cercles décrits par les élemens du quart de cercle ſont dans la même raiſon que les rectangles; donc leur ſomme, c'eſt-à-dire la demi-Sphere eſt égale au produit du plus grand cercle BCN multiplié par le nombre des termes, ou par le rayon AC moins le tiers de ce produit, & par conſéquent elle en vaut les deux tiers tiers; d'où il eſt aiſé de conclure que la demi-Sphere eſt égale aux deux tiers d'un cylindre BNMD, qui auroit pour baſe le grand cercle BCN, & pour hauteur le rayon, & que la Sphere entiere eſt égale aux deux tiers du cylindre circonſcrit, ou qui auroit pour baſe le cercle BCN, & pour hauteur le diamétre AP: ce que nous ſçavons être véritable par la Géométrie ordinaire.

35. Les quarrés des élemens du quart de cercle ABC étant entr'eux comme la ſuite des rectangles correſpondans $2x \times o - oo$, $2xa - aa$, $2xb - bb$, $2xc - cc$, $2xd - dd$, &c. $2xx - xx$, les élemens feront donc entr'eux comme la ſuite $\sqrt{2x \times o - oo}$, $\sqrt{2xa - aa}$, $\sqrt{2xb - bb}$, $\sqrt{2xc - cc}$, $\sqrt{2xd - dd}$, &c. $\sqrt{2xx - xx}$. On auroit donc la quadrature du cercle, ſi l'on pouvoit trouver le rapport de cette ſuite à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes, mais c'eſt ce qu'on n'a pû découvrir juſqu'à preſent.

36. Si l'on fait tourner une demi-Ellipſe ACB (*Fig.* 11.) autour de ſon grand axe AB, l'ellipſoïde qui en ſera formé ſera égal au cercle que décrira le petit diamétre OC multiplié par les deux tiers du grand axe AB; car les élemens de l'ellipſe ordonnés au grand axe AB, ſont entr'eux comme les élemens du demi-cercle circonſcrit AEB, ainſi leurs quarrés, ou les cercles qu'ils décriront autour du grand axe, ſeront entr'eux comme les quarrés, ou comme les cercles que décriront les ordonnées du demi-cercle; or la ſomme des cercles décrits par les élemens du demi-cercle, c'eſt-à-dire la Sphere eſt égale à ſon grand cercle multiplié par les deux tiers du diamétre AB; donc l'ellipſoide, ou la ſomme des cercles décrits par les élemens de l'ellipſe ſera égale à ſon plus grand cercle, c'eſt-à-dire au cercle décrit par OC multiplié par $\frac{2}{3}$ AB.

37. Il est aisé de voir que si l'on fait tourner une demi-ellipse DAC autour de son petit axe DC, le spheroïde qui en sera formé sera égal au cercle que décrira le demi grand axe AO multiplié par les deux tiers du petit axe CD ; car les élemens de cette demi-ellipse ordonnés au petit axe, sont entr'eux comme les élemens du demi cercle inscrit DHC.

38. Dans la parabole ordinaire MNR (*Fig.* 7.), les quarrés des élemens AB. CD, sont entr'eux comme les abscisses MA, MC, &c. ou comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4. 5, &c. x; donc les élemens sont entr'eux comme les racines quarrées de ces nombres, lesquelles ont pour exposans $\frac{1}{2}$, & par conséquent leur somme est au dernier ou plus grand NR multiplié par le nombre des termes, ou par NM comme 1 est à l'exposant $\frac{1}{2}$ augmenté de l'unité, c'est-à-dire, comme 1 est $\frac{3}{2}$, ou comme $\frac{2}{2}$ est à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3 ; ainsi la parabole est les deux tiers du rectangle circonscrit.

40. Si l'on fait tourner une demi-parabole MNR (*Fig.* 13.) autour de son axe fixe & immobile MR, ses élemens AB, CD perpendiculaires à l'axe, décriront des cercles dont la somme sera un paraboloïde, & ces cercles seront entr'eux comme les quarrés des élemens qui sont leurs rayons : or les quarrés des élemens sont entr'eux comme leurs abscisses, ou comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. x ; donc la somme des quarrés des élemens, ou celle de leurs cercles, est au dernier & plus grand NS multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur MR comme 1 à 2, c'est-à-dire le paraboloïde est la moitié du cylindre circonscrit.

40. Si l'on fait tourner une demi-parabole MNR (*Fig.* 14.) autour de la base HN de son complement MHN, on trouvera le solide décrit en cette sorte. Je cherche d'abord le solide décrit par son complement, c'est-à-dire, la somme des cercles décrits par ses élemens BE, DF, &c, perpendiculaires à HN, mais comme le rapport de ces élemens entr'eux m'est inconnu, car je ne connois dans ce complement que le rapport des élemens perpendiculaires sur MH ; j'observe que les élemens BE, DF, &c. ne sont autre chose que les élémens AE, CF, &c. du rectangle circonscrit, moins les élemens AB, CD, &c. de la parabole, lesquels sont entr'eux comme les racines de leurs abscisses MA, MC, &c. ou des nombres 0. 1. 2. 3, &c. Nommant donc e chaque élement AE, &c. du rectangle, & r chaque élement AB, &c. de la parabole, chaque élement BE, &c. du comple-

ment sera $e-r$; or les cercles que les élemens $e-r$ décriront autour de HN seront comme les quarrés de ces élemens qui sont leurs rayons; faisant donc le quarré de $e-r$ qui est $ee-2er+rr$, les quarrés des élemens BE, DF, &c. formeront la suite des $ee-2er+rr$, & par conséquent cette suite contiendra la suite ee des quarrés des égaux ou des quarrés des élemens AE, CF, &c. du rectangle circonscrit RH, moins $2er$, c'est-à-dire moins deux suites des racines quarrées ou des élemens AB, CD, &c. de la parabole multipliés chacun par e, plus la suite des quarrés rr de ces racines; or la suite des ee est égale à son dernier terme, c'est-à-dire au quarré de RN, ou MH multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur HN; les er étant tous multipliés par la même quantité e, sont entr'eux comme s'ils n'étoient pas multipliés, & par conséquent leur somme est à leur dernier terme, ou au quarré de RN, ou MH multiplié par le nombre des termes HN comme 1 est à l'exposant $\frac{1}{2}$ augmenté de l'unité, ou comme 2 est à 3; donc les $2er$, c'est-à-dire les doubles des er, sont les $\frac{4}{3}$ de leur dernier terme multiplié par HN; enfin les rr étant les quarrés des racines, sont comme les nombres 0. 1. 2. 3, &c. & leur somme est la moitié du produit de leur dernier terme, ou quarré de RN ou HM multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur HN; donc la suite des quarrés des élemens est égale au produit $\overline{HM}^2 \times HN$, moins les $\frac{4}{3}$ de ce produit, plus la moitié, c'est-à-dire elle est égale à $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9}{6} - \frac{8}{6} = \frac{1}{6}$ du produit de son dernier terme multiplié par le nombre des termes; or les cercles décrits par les élemens BE, DF, &c. du complement sont entr'eux comme les quarrés de ces élemens; donc la somme des cercles, ou le solide décrit par le complement est le sixiéme du produit de son plus grand cercle MT multiplié par la hauteur HN, c'est-à-dire le sixiéme du cylindre circonscrit RT.

D'où il suit que le solide décrit par la circonvolution de la parabole MNR autour de HN doit être les $\frac{5}{6}$ du cylindre RT.

41. *Nota.* Que lorsqu'on a une suite composée de plusieurs autres, il faut que les derniers termes de chacune de ces suites soient égaux entr'eux pour pouvoir en tirer la somme totale comme nous avons fait dans l'exemple précédent; mais si cela n'étoit pas, on s'y prendroit comme il sera dit plus bas.

42. Si l'on fait tourner une demi-parabole MNR (*Fig.* 15.) autour d'une droite MH tangente à son sommet M, on trouvera le solide décrit en cette sorte: les élemens AB, CD, &c. du

complement MHN perpendiculaires ſur MH, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs abſciſſes MA, MC, ou des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. donc les quarrés de ces élemens ſont entr'eux comme les quatriémes puiſſances de ces nombres, & par conſéquent ils ſont à leur dernier terme, c'eſt-à-dire au quarré de HN multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur MH, comme 1 eſt à l'expoſant 4 augmenté de l'unité, ou comme 1 à 5; mais les cercles que les élemens décrivent en tournant autour de MH, ſont entr'eux comme les quarrés des élemens; donc leur ſomme eſt le $\frac{1}{5}$ du produit du plus grand NT multiplié par MH, c'eſt-à-dire le cinquiéme du cylindre circonſcrit RT; donc le ſolide produit par la circonvolution de la demi-parabole MNR doit être les $\frac{4}{5}$ de ce cylindre.

43. Si l'on fait tourner une demi-parabole MNR (*Fig.* 16.) autour de ſa baſe RN, voici comme on trouvera le ſolide décrit: les élemens AB, CD, &c. perpendiculaires ſur la baſe RN ſont égaux aux élemens AE, CF, du rectangle circonſcrit RH moins les élemens BE, DF, &c. du complement qui ſont entr'eux comme les quarrés des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. Nommant donc *e* chaque élement AE, &c. du rectangle, & *q* chaque élement BE du complement, les élemens AB, &c. ſeront les $e-q$, & leurs quarrés ſeront les $ee-2eq+qq$; ainſi la ſuite de leurs quarrés contiendra la ſuite des *ee*, ou des quarrés égaux des élemens du rectangle moins $2eq$, c'eſt-à-dire moins deux fois la ſuite des quarrés ou des élemens du complement multipliés chacun par *e*, plus la ſuite des *qq* ou des quatriémes puiſſances des nombres o. 1. 2. 3, &c. *x*; or la ſuite des *ee* eſt égale à ſon dernier terme, ou au quarré de MR multiplié par le nombre des termes NR; les *eq* étant la ſuite des quarrés multipliés chacun par une même grandeur *e*, ſont entr'eux comme s'ils n'étoient pas multipliés, & par conſéquent à cauſe de leur expoſant 2 leur ſomme eſt le tiers du produit de leur dernier terme *eq*, ou du quarré de HN ou MR multiplié par le nombre des termes RN; d'où il ſuit que la ſomme des $2eq$ eſt les deux tiers du même produit; enfin la ſomme des *qq* dont l'expoſant eſt 4, eſt le cinquiéme du produit de ſon dernier terme *qq*, c'eſt-à-dire du quarré $\overline{HN}^2$, ou $\overline{RM}^2$ multiplié par le nombre des termes RN; donc la ſomme des quarrés des élemens AB, CD, &c. de la parabole eſt égale au produit $\overline{RM}^2 \times RN$ du quarré de leur dernier terme multiplié

multiplié par le nombre des termes, moins les $\frac{2}{3}$ de ce produit, plus le $\frac{1}{5}$, c'eſt-à-dire égale à $\frac{6}{5} - \frac{2}{3} = \frac{18}{15} - \frac{10}{15} = \frac{8}{15}$ du produit; donc la ſomme des cercles décrits par ces élemens eſt auſſi au plus grand MS multiplié par le nombre des termes RN comme 8 à 15, & par conſéqnent elle eſt les huit cinquiémes du cylindre circonſcrit MT.

44. *Remarque.* Il y a des paraboles de tous les dégrés au-deſſus de la parabole ordinaire qui ſe nomme parabole quarrée, parce que les quarrés de ſes ordonnées ſont entr'eux comme leurs abſciſſes, & dans chaque dégré excepté dans le ſecond qui eſt celui de la parabole ordinaire il ſe trouve plus d'une parabole : par exemple en nommant y chaque ordonnée, x chaque abſciſſe, & a le parametre, la premiere parabole du troiſiéme dégré eſt $y^3 = aax$, c'eſt-à-dire les cubes des ordonnées ſont égaux aux abſciſſes multipliées par le quarré du parametre, & par conſéquent les cubes des ordonnées ſont comme les abſciſſes. La ſeconde parabole du même dégré eſt $y^3 = axx$, c'eſt-à-dire les cubes des ordonnées ſont entr'eux comme les quarrés des abſciſſes, & dans ce dégré il n'y a qne ces deux paraboles, parce qu'on ne peut pas combiner les lettres a, x, autrement que de ces deux façons. La premiere parabole du quatriéme dégré eſt $y^4 = a^3x$, où les quatriémes puiſſances des ordonnées ſont entr'elles comme leurs abſciſſes : la ſeconde eſt $y^4 = ax^3$, & quoiqu'il ſemble qu'on puiſſe en trouver une troiſiéme $y^4 = aaxx$, cependant celle-ci eſt du ſecond dégré ; car celle du ſecond dégré étant $yy = ax$, il eſt clair qu'en quarrant les deux membres on aura $y^4 = aaxx$. La premiere parabole du cinquiéme dégré eſt $y^5 = a^4x$; la ſeconde $y^5 = a^3xx$; la troiſiéme eſt $y^5 = aax^3$; & la quatriéme eſt $y^5 = ax^4$. Dans le ſixiéme dégré on trouve $y^6 = a^5x$, $y^6 = ax^5$; mais $y^6 = a^4xx$ n'eſt pas de ce dégré ; car en tirant la racine quarrée de part & d'autre, on a $y^3 = a^2x$, ce qui fait voir que cette parabole eſt du troiſiéme dégré. De même $y^6 = a^3x^3$, & $y^6 = a^2x^4$ ne ſont pas du ſixiéme dégré ; car par l'extraction de la racine cubique, on réduit la premiere à $y^2 = ax$ qui eſt la parabole quarrée, & par l'extraction de la racine quarrée on réduit la ſeconde à $y^3 = axx$ qui eſt la ſeconde parabole du troiſiéme dégré ; on trouvera de même les paraboles du ſeptiéme dégré, &c. en obſervant que dans tous les dégrés, les premieres paraboles ſont celles où l'abſciſſe x eſt au premier dégré. Cela poſé.

45. Il eſt aiſé de trouver le rapport de toutes les paraboles au

rectangle circonscrit de quelque dégré que soient ces paraboles: par exemple dans la premiere parabole cubique ou du troisiéme dégré $y^3=aax$, les cubes AB, CD, &c. (*Fig.* 17.) étant entre eux comme leurs abscisses, les ordonnées ou les élemens sont par conséquent comme les racines cubiques des abscisses MA, MC, &c. ou comme les racines des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. x, lesquelles ont pour exposant $\frac{1}{3}$; donc la somme des élemens est au dernier ou plus grand RN multiplié par le nombre des termes MR, comme 1 à l'exposant $\frac{1}{3}$ plus 1, ou comme 1 à $\frac{4}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire comme 3 à 4, & partant la parabole est les $\frac{3}{4}$ du rectangle circonscrit. De même dans la premiere parabole $y^4=a^3x$ du quatriéme dégré, les 4es. puissances des ordonnées ou des élemens étant entr'eux comme les abscisses, ou comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. x, les élemens sont comme les racines quatriémes de ces nombres, lesquels ont pour exposant $\frac{1}{4}$; donc leur somme est au rectangle circonscrit comme 1 à l'exposant $\frac{1}{4}$ plus un, ou comme 1 à $\frac{5}{4}$, ou comme $\frac{4}{4}$ à $\frac{5}{4}$, comme 4 à 5, & par conséquent cette parabole est les $\frac{4}{5}$ du rectangle circonscrit, & ainsi des autres premieres paraboles de tous les dégrés.

Dans la seconde parabole cubique $y^3=axx$ les cubes des ordonnées ou des élemens étant entr'eux comme les quarrés des abscisses, ou comme les quarrés des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. x, lesquels quarrés ont pour exposant 2, les élemens sont par conséquent comme les racines cubiques de ces quarrés, & ces racines ont pour exposant $\frac{2}{3}$; car nous sçavons que pour tirer la racine d'une puissance, il faut diviser l'exposant de cette puissance par l'exposant de la racine qu'on veut tirer (*N.* 20.); donc la somme des elemens est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, ou au rectangle circonscrit comme 1 est à l'exposant $\frac{2}{3}$ plus 1, ou comme 1 à $\frac{5}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{5}{3}$, ou comme 3 à 5. De même dans la seconde parabole du quatriéme dégré $y^4=ax^3$, les quatriémes puissances des ordonnées étant entre elles comme les cubes des abscisses ou des nombres 0. 1 2. 3, &c. x, lesquels cubes ont pour exposant 3, les élemens sont comme les racines quatriémes de ces cubes, & par conséquent leur exposant est $\frac{3}{4}$, donc leur somme est au rectangle circonscrit comme 1 est à $\frac{3}{4}$ augmenté de l'unité, ou comme 1 à $\frac{7}{4}$, ou comme $\frac{4}{4}$ à $\frac{7}{4}$, c'est-à-dire comme 4 à 7, & ainsi des autres.

46. Si sur l'axe MR d'une demi-parabole ordinaire MNR

(*Fig.* 18.) on éleve perpendiculairement un triangle rectangle MRT, & qu'on multiplie les élemens AB, CD, &c. de la parabole par les élemens correſpondans AE, CF, &c. du triangle, les rectangles formés par ces produits compoſeront un ſolide TPNRM dont on trouvera la ſolidité en cette ſorte. Les élemens AB, CD, &c. de la parabole ſont entr'eux comme les racines quarrées de leurs abſciſſes ou des nombres o. 1. 2. 3, &c. x, leſquelles racines ont pour expoſant $\frac{1}{2}$, & les élemens AE, CF, &c. du triangle ſont entr'eux comme leurs abſciſſes, ou comme les nombres o. 1. 2. 3, &c. x, dont l'expoſant eſt 1; donc les produits des termes de ces deux ſuites, c'eſt-à-dire les rectangles faits par les élemens de la parabole multipliés par ceux du triangle auront pour expoſant $\frac{1}{2} + 1$, ou $\frac{3}{2}$ (*N.* 20.) & par conſéquent ces rectangles feront à leur dernier terme ou à la baſe TPNR multipliée par le nombre des termes, ou par la hauteur MR, comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{3}{2}$ plus un, ou comme 1 à $\frac{5}{2}$, ou comme $\frac{2}{2}$ à $\frac{5}{2}$, c'eſt-à-dire comme 2 à 5; ainſi le ſolide TPRNM ſera les deux cinquiémes du paralellepipede circonſcrit, c'eſt-à-dire de même baſe & de même hauteur.

47. A l'exemple du ſolide précédent on pourroit en former une infinité d'autres & en trouver la ſolidité tout auſſi aiſément; par exemple on pourroit multiplier les élemens d'un triangle par les élemens d'un complement de parabole, ou les élemens d'une parabole par ceux de ſon complement, ou les élemens d'une parabole d'un certain dégré par ceux d'une parabole d'un autre dégré, &c.

48. Si l'on ajoute aux élemens BA, DC, &c. d'une demi-parabole-quarrée MNR (*Fig.* 19.) les élemens AE, CF, &c. d'un rectangle MRTP, & qu'on faſſe tourner leur ſomme autour du côté PT fixe & immobile du rectangle, le ſolide produit par la circonvolution de la figure NMPT ſe connoîtra en cette ſorte. Les élemens de la figure NMPT étant compoſés des élemens du rectangle qui ſont tous égaux entr'eux, & des élemens de la demi-parabole qui ſont entr'eux comme les racines de leurs abſciſſes, ou des nombres o. 1. 2. 3, &c. x. Si nous nommons e chaque élement du rectangle, & r chaque élement de la demi-parabole, les élemens de la figure NMPT ſeront les $e+r$, & leurs quarrés ſeront la ſuite des $ee + 2er + rr$; or cette ſuite contient 1°. la ſuite des ee, ou des quarrés des élemens du rectangle. 2°. La ſuite $2er$, c'eſt-à-dire deux fois la ſuite des elo-

mens de la demi-parabole multipliés chacun par e. 3°. la suite des rr, ou des quarrés des élemens de la demi-parabole ; mais la suite des ee est égale à son dernier terme, ou au quarré de RT multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur PT ; les er étant les r multipliés par la même quantité e sont entr'eux comme les r, & par conséquent leur somme est au dernier terme er, c'est-à-dire au rectangle $RT \times NR$ multiplié par le nombre des termes, ou par PT, comme 1 est à l'exposant $\frac{1}{2}$ des r augmenté de l'unité, c'est-à-dire comme 1 est à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3 ; d'où il suit que les $2er$ sont les $\frac{4}{3}$ de $RT \times NR$ multiplié par PT, enfin les rr étant les quarrés des racines quarrées ou des élemens de la demi-parabole sont comme les nombres 0. 1. 2. 3, &c. x, & leur somme est la moitié de leur dernier terme, ou du quarré de NR multiplié par le nombre des termes PT: maintenant comme ces trois suites ee, $2er$, rr, n'ont pas leurs derniers termes égaux, à cause que RT peut être plus grand ou moindre que NR, nous ne pouvons pas faire une somme totale de leurs sommes, ainsi nous nous contenterons de sçavoir que la somme des quarrés des élemens BE, DF, &c. de la figure NMPT est $\overline{RT}^2 \times PT + \frac{4}{3} RT \times RN \times PT + \frac{1}{2} \overline{NR}^2 \times PT$; or le quarré du dernier terme de cette somme, c'est-à-dire le quarré de NT ou de RT + NR est $\overline{RT}^2 + 2RT \times RN + \overline{NR}^2$; donc ce quarré multiplié par le nombre des termes PT est $\overline{RT}^2 \times PT + 2RT \times RN \times PT + \overline{NR}^2 \times PT$, & par conséquent la somme des quarrés des élemens de la figure NMPT est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme $\overline{RT}^2 \times PT + \frac{4}{3} RT \times RN \times PT + \frac{1}{2} \overline{NR}^2 \times PT$ est à $\overline{RT}^2 \times PT + 2RT \times RN \times PT + \overline{NR}^2 \times PT$, ou comme $\overline{RT}^2 + \frac{4}{3} RT \times RN + \frac{1}{2} \overline{NR}^2$ est à $\overline{RT}^2 + 2RT \times RN + \overline{NR}^2$, à cause du multiplicateur commun PT, c'est-à-dire que la somme est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme le quarré de RT plus les $\frac{4}{3}$ du rectangle fait de RT par NR plus la moitié du quarré de NR, est au quarré de RT plus deux fois le rectangle de RT par NR, plus le quarré de NR, & ce rapport peut se connoître aisément quand les lignes RT, NR, seront connues : or les cercles que les élemens BE, DF, &c. décrivent en tournant au-

tour de PT sont comme les quarrés de ces élemens ; donc leur somme ou le solide décrit par la circonvolution de la figure NMPT autour de PT est au dernier terme ou au cercle NH multiplié par le nombre des termes PT comme $\overline{RT}^2 + \frac{4}{3}RT \times RN + \frac{1}{2}\overline{NR}^2$ est à $\overline{RT}^2 + 2RT \times RN + \overline{NR}^2$.

A l'imitation de ce solide on pourroit en former une infinité d'autres, & en trouver la valeur avec la même facilité : par exemple on pourroit ajouter aux élemens du rectangle RMPT les élemens d'un complement de parabole quarrée, ou ceux d'une parabole de quelque dégré qu'elle fut, ou ceux d'un complement d'une parabole quelconque, &c.

De plus si du solide décrit par la circonvolution de la figure NMPT autour de PT nous ôtons le cylindre décrit par le rectangle MRTP, nous aurons le solide, ou l'anneau ouvert décrit par la demi-parabole NMR autour de PT, ce qui donne le moyen de connoître une infinité d'anneaux ouverts qu'on pourroit former en mettant au lieu de la parabole NMR quelqu'autre parabole d'un dégré plus élevé, ou quelque complement, &c.

49. *Nota.* Que dans toutes les paraboles le rapport des élemens du complement paralelles à l'axe se connoît par l'équation même de la parabole : par exemple soit la premiere parabole cubique MNR (*Fig.* 19.) dont le complement est MHN, & dont l'équation est $y^3 = aax$ qui signifie que les cubes des ordonnées sont entr'eux comme leurs abscisses. Je mene dans son complement les élemens AB, CD, &c. paralelles à l'axe, & des points B, D, &c. les ordonnées BE, DF, &c. ainsi les élemens AB, CD, &c. sont égaux aux abscisses ME, MF, &c. de l'axe, & les coupées MA, MC, &c. sont égales aux ordonnées BE, DE, &c. à l'axe ; donc les élemens AB, CD, &c. du complement sont comme les cubes de leurs abscisses MA, MC, &c. & c'est ce que l'équation $y^3 = aax$ me fait voir ; car x representant les abscisses, represente par conséquent les élemens du complement, & y^3 representant les cubes des ordonnées à l'axe represente aussi les cubes des coupées MA, MC, &c. par la même raison on trouvera que dans la seconde parabole cubique $y^3 = axx$, les quarrés des élemens du complement sont comme les cubes de leurs abscisses, & ainsi des autres.

50. Si l'on fait tourner une demi-hyperbole MNR (*Fig.* 20.) autour de son premier axe prolongé PR, on trouvera le solide

décrit en cette sorte. Les quarrés des élemens AB, CD, &c. sont entr'eux comme les rectangles MB × BP, MD × DP, &c. des abscisses MB, MD, &c. par les droites PB, PD, &c. qui ne sont autre chose que l'axe PM augmenté des abscisses MB, MD; nommant donc a l'axe, & x chaque abscisse, chaque droite PB, PD, &c. sera donc $a+x$, & chaque rectangle sera $ax+xx$, ainsi la suite des rectangles sera la suite des $ax+xx$, qui contient la suite des ax, & celle des xx; or les ax étant les abscisses x multipliées par la même grandeur a sont entr'eux comme les x, c'est-à-dire comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. x; donc leur somme sera la moitié de leur dernier terme MR × PM multiplié par le nombre des termes ou par MR, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\overline{MR}^2 \times PM$, & les xx étant les quarrés des abscisses, sont le tiers de leur dernier terme $\overline{MR}^2$ multiplié par le nombre des termes ou par MR, c'est-à-dire $\frac{1}{3}\overline{MR}^3$; partant la somme des rectangles est $\frac{1}{2}\overline{MR}^2 \times PM + \frac{1}{3}\overline{MR}^3$, mais le dernier ou le plus grand rectangle est MR×PR, ou MR × PM + MR × MR, à cause que PR = PM + MR, & ce rectangle multiplié par le nombre des termes MR est $\overline{MR}^2 \times PM + \overline{MR}^3$; donc la somme des rectangles est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme $\frac{1}{2}\overline{MR}^2 \times PM + \frac{1}{3}\overline{MR}^3$ est à $\overline{MR}^2 \times PM + \overline{MR}^3$, & divisant tout par $\overline{MR}^2$, la somme est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme $\frac{1}{2}PM + \frac{1}{3}MR$ est à PM + MR, c'est-à-dire comme la moitié du premier axe PM, plus le tiers de la plus grande abscisse MR est à la somme PM + MR du premier axe & de la plus grande abscisse; or les cercles décrits par les ordonnées autour de MR sont entr'eux comme les quarrés des ordonnées, donc leur somme ou l'hyperboloïde est au dernier cercle NH multiplié par MR, c'est-à-dire au cylindre circonscrit comme $\frac{1}{2}PM + \frac{1}{3}MR$ est à PM + MR.

51. *Soit un angle* MAX (*Fig.* 21.) *de* 45 *dégrés dont les côtés* AM, AX, *sont indéfinis, si l'on conçoit dans cet angle une infinité d'élemens* CG, FH, *&c. perpendiculaires au côté* AX, *& qu'après avoir pris des troisiémes proportionnelles à chaque élement* CG, FH, *&c. & à une même grandeur constante* AB, *on mette ces troisiémes proportionnelles perpendiculairement sur* AX *de* G *en* u, *de* H *en* i, *&c. & qu'ensuite on fasse passer une courbe par leurs extrêmités* u,

i, E, &c. je dis que cette courbe ne touchera les deux droites Ad, AX, *qu'à l'infini, & que les espaces compris de part & d'autre entre la courbe & les droites* Ad, AX, *sont infinis & égaux entr'eux.*

En premier lieu, la droite A*d* étant troisiéme proportionnelle à l'élement de l'angle MAX, lequel élement est égal à zero au point A, & à la droite AB, doit être infinie en longueur, & par conséquent la courbe qui doit passer par son extrêmité ne peut la rencontrer qu'à l'infini.

En second lieu, les élemens CG, FH, &c. de l'angle MAB allant toujours en augmentant, il s'en trouve un *b*B égal à AB, après quoi ceux qui viennent après tels que *r*R, M*m*, &c. deviennent d'autant plus grands que *b*B, qu'ils s'en éloignent davantage, c'est pourquoi les troisiémes proportionnelles à ces élemens, & à AB, vont toujours en diminuant, cependant il ne peut cesser d'y avoir de troisiéme proportionnelle, ou la troisiéme proportionnelle ne peut devenir égale à zero, que lorsque l'élement de l'angle MAX deviendra infiniment grand par rapport à AB, son abscisse prise sur la ligne AX sera aussi infinie; car les élemens CG, FH, &c. de l'angle MAX sont égaux chacun à chacun à leurs abscisses AG, AH, &c. à cause qu'ils sont perpendiculaires sur AX, & que l'angle MAX est de 45 degrés; donc la courbe ne rencontrera la droite AX qu'à l'infini; ainsi les deux droites A*d*, AX, sont asymptotes de la courbe.

En troisiéme lieu, à cause de CG. AB :: AB. G*u*, nous avons $CG \times Gu = \overline{AB}^2$; de même à cause de FH. AB :: AB. H*i*, nous avons $FH \times Hi = \overline{AB}^2$; donc $CG \times Gu = FH \times Hi$, & partant G*u*. H*i* :: FH. CG; or les triangles semblables FHA, CGA, donnent FH. CG :: AH. AG; donc G*u*. H*i* :: AH. AG, c'est-à-dire les élemens G*u*. H*i*, &c. perpendiculaires à l'asymptote AX, sont entr'eux réciproquement comme leurs abscisses; or les abscisses AG, AH, &c. sont comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3, &c. dont l'exposant est 1; donc l'exposant de la suite des ordonnées G*u*, H*i*, &c. à l'asymptote AX est —1 (*N.* 28.), ainsi la somme des élemens compris dans l'espace BA*due* est à son dernier terme BE multiplié par le nombre des termes BA, c'est-à-dire au quarré ABED comme 1 est à — 1 + 1, ou comme 1 à zero; mais le rapport de 1 à zero est infini; donc l'espace BA*due* est infini par rapport au quarré ABED.

Nota. Que je dis *le quarré* ABED, à cause que l'élement *b*B

de l'angle MAX mené de l'extrêmité B de la droite AB étant égal à AB, la troisiéme proportionnelle BE à l'élement bB, & à la droite AB est égale à AB.

De même si je mene des ordonnées Ts, Px, &c. à l'asymptote Ad, & que de leurs extrémités s, x, je mene les ordonnées sS, xm, &c. à l'asymptote AX, j'aurai à cause des paralelles, $AT = Ss$, $AP = mx$, &c. & $Ts = AS$, $Px = Am$, &c. or nous venons de trouver que les ordonnées Ss, mx, &c. sont réciproques à leurs abscisses; donc les ordonnées Ts, Px, &c. à l'asymptote Ad sont réciproques à leurs abscisses AT, AP, &c. mais ces abscisses sont entr'elles comme les nombres 0. 1. 2. 3, &c. dont l'exposant est 1; donc la suite des ordonnées Ts, Px, &c. de l'espace indéfini ADESX a pour exposant -1, & par conséquent cette suite est à son dernier terme DE multiplié par le nombre des termes AD, c'est-à-dire au quarré ADEB comme 1 est à $-1+1$, ou comme 1 à 0, ainsi l'espace indéfini est infiniment grand par rapport au quarré ABED.

Les espaces indéfinis BAdue, ADEsX ayant le même rapport infini au quarré ABED sont donc parfaitement égaux entr'eux.

52. *La courbe que nous venons de décrire est une hyperbole ordinaire équilatere, c'est-à-dire dont les deux axes sont égaux, & sa puissance est le quarré* ABED.

Car d'un point quelconque i menant les ordonnées iH, iN aux deux asymptotes, nous aurons iH. BE :: AB. AH, comme on a vû ci-dessus; donc $iH \times AH = \overline{BE}^2$; or à cause des paralelles nous avons $iN = AH$, & $Hi = AN$; donc $iN \times AN = \overline{BE}^2$, ce qui est la proprieté de l'hyperbole entre ses asymptotes.

Nota. Que j'ai dit que cette hyperbole est équilatere, à cause que l'angle des asymptotes est droit; car si l'on décrit une hyperbole avec deux axes égaux, on trouvera toujours que ses asymptotes formeront un angle droit, ce qui n'arrive jamais quand les deux axes sont inégaux.

Nota. *Si l'on fait tourner l'espace hyperbolique infini* BAduE *autour de l'asymptote* Ad *immobile, le solide infiniment long* pqtxzh, *produit par cette circonvolution, est cependant d'une grandeur finie & égal à un paralellepipede qui auroit pour base le quarré* ABED, *& pour hauteur une ligne égale à la circonférence décrite par le rayon* AB.

Car par la proprieté de l'hyperbole $Gu \times AG = Hi \times AH = BE \times AB$, c'est-à-dire les produits des ordonnées Gu, Hi, &c.

par

par leurs abſciſſes AG, AH, &c. ſont tous égaux entr'eux, & au quarré de AB; or les abſciſſes AG, AH, &c. AB, ſont entr'elles comme les circonférences qu'elles décriront autour de l'aſymptote A*d*; donc les ordonnées G*u*, H*i*, &c. BE multipliées par les circonférences que leurs abſciſſes AG, AH, &c. AB, décriroient, donnent des produits égaux, c'eſt-à-dire G*u* × (AG = H*i* × (AH = BE × (AB; mais quand la figure BA*du*E tourne autour de l'aſymptote, ſes ordonnées G*u*, H*i*, &c. BE décrivent des ſurfaces de cylindres qui ont pour baſes les cercles décrits par les abſciſſes AG, AH, &c. AB, & ces ſurfaces ne ſont autre choſe que les produits G*u* × (AG, H*i* × (AH, &c. BE × (AB; donc le ſolide décrit par la circonvolution de la figure BA*du*E n'eſt pas différent de la ſomme de ces ſurfaces, ou des produits G*u* × (AG, H*i* × (AH, &c. or la ſomme de ces produits eſt égale au dernier produit BE × (AB multiplié par le nombre qui en marque la multitude, c'eſt-à-dire par AB, donc le ſolide eſt égal à BE × (AB × AB, ou BE × AB × (AB, c'eſt-à-dire que ſi l'on prend une ligne droite égale à (AB, & qu'on multiplie le quarré ADEB par cette ligne, on aura la valeur du ſolide; mais le produit du quarré ADEB par la ligne égale à (AB eſt un paralellepipede; donc le ſolide eſt égal à ce paralellepipede.

On prouveroit la même choſe par l'arithmetique des Infinis; car les élemens G*u*, H*i*, &c. étant réciproques aux élemens CG, FH, &c. de l'angle indéfini MAX, ont pour expoſant −1, à cauſe que l'expoſant des élemens CG, FH, &c. eſt 1; multipliant donc ces élemens G*u*, H*i*, &c. par les circonférences de leurs abſciſſes AG, AH, dont l'expoſant eſt 1; la ſuite des produits aura pour expoſant −1+1, ou 0, & par conſéquent cette ſuite ſera à ſon dernier terme BE × (AB multiplié par le nombre des termes AB comme 1 eſt à 0+1, ou comme 1 eſt à 1; ainſi la ſomme des ſurfaces décrites par les élemens G*u*, H*i*, ou le ſolide ſera BE × AB × (AB, ce qui fait voir le parfait accord de l'arithmétique des Infinis avec la Geometrie.

53. *Soit une demi-parabole ordinaire indéfinie* Abrm (Fig. 22.) *dont le parametre ſoit la ligne* AB, *& dans laquelle on ait mené l'ordonnée* ab *égale au parametre, & par conſequent égale à ſon abſciſſe* aA (Liv. II. N. 673.) *Si l'on prend des troiſiémes proportionnelles aux élemens* CG, FH, *&c. du complement indéfini* mAX, *& au parametre* AB, *& qu'après avoir mis ces troiſiémes propor-*

tionnelles perpendiculairement sur AX *de* G *en* u, *de* H *en* i, *&c. on fasse passer une courbe par ses extrémités, je dis* 1° *que cette courbe ne rencontrera les droites* Ad, AX, *qu'à l'infini*; 2° *que l'espace indéfini compris entre la courbe & l'asymptote* Ad *est pour ainsi dire plus qu'infini, & qu'au contraire l'espace compris entre la courbe & l'autre asymptote* AX *est d'une valeur finie quoiqu'il soit indéfini en longueur.*

En premier lieu A*d* est infinie en longueur à cause qu'elle est troisiéme proportionnelle à l'élement du complement parabolique, lequel est égal à zero au point A, & au parametre AB.

En second lieu, les élemens du triangle parabolique qui se trouvent au-dessous de l'élement *b*B = AB sont d'autant plus grands que *b*B ou AB qu'ils s'en éloignent davantage; ainsi les troisiémes proportionnelles à ces élemens & au parametre AB, sont d'autant plus petites que BE = AB qu'elles s'en éloignent davantage; cependant la troisiéme proportionnelle ne peut devenir infiniment petite ou égale à zero, que lorsque l'élement *m*M du complement sera infiniment grand par rapport à *b*B; or alors nous aurons *m*M. *b*B :: $\overline{MA}^2$. $\overline{AB}^2$ par la proprieté de la parabole; donc $\overline{MA}^2$ sera infiniment grand par rapport à $\overline{AB}^2$, & par conséquent MA sera aussi infiniment grand par rapport à AB, ainsi la courbe ne rencontrera la droite AX qu'à l'infini.

En troisiéme lieu, à cause de CG. AB :: AB. G*u*, nous avons CG × G*u* = $\overline{AB}^2$, & à cause de FH. AB :: AB. H*i*, nous avons FH × H*i* = CG × G*u*; donc G*u*. H*i* :: FH. CG; mais par la proprieté de la parabole, on a FH. CG :: $\overline{AH}^2$. $\overline{AG}^2$; donc G*u*. H*i* :: $\overline{AH}^2$. $\overline{AG}^2$, c'est-à-dire les ordonnées à l'asymptote AX, sont entr'elles réciproquement comme les quarrés de leurs abscisses; or les abscisses étant entr'elles comme les nombres naturels o. 1. 2. 3, &c. leurs quarrés ont pour exposant 2; donc dans l'espace indéfini BA*du*E, la suite des élemens ordonnés à AX, a pour exposant —2 (*N.* 28.) & par conséquent cette suite est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes AB, c'est-à-dire au quarré ABED comme 1 est à —2 + 1, ou comme 1 est à —1; ainsi l'espace indéfini BA*du*E est pour ainsi dire plus qu'infini par rapport au quarré ABED, puisque son rapport à ce quarré est comme 1 à —1, lequel est plus grand que le rapport de 1 à o qui est infini.

Maintenant si je mene des ordonnées Ts, Px, &c. à l'autre asymptote Ad, & que de leurs extrémités s, x, j'en mene d'autres sS, Mx à l'asymptote AX, j'aurai $Ss = As$, $Mx = AP$, &c. à cause des paralelles, & $Ts = As$, $Px = AM$, &c. or Ss, Mx, &c. sont réciproques aux quarrés de AS, AM, &c. donc les quarrés des ordonnées Ts, Px, &c. à l'asymptote Ad sont aussi réciproques à leurs abscisses, & par conséquent leurs racines, c'est-à-dire les ordonnées Ts, Px, &c. sont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées des abscisses ; or les abscisses étant comme les nombres 0. 1. 2. 3, &c. leurs racines quarrées ont pour exposant $\frac{1}{2}$, donc dans l'espace indéfini DAXsE la suite des élemens ordonnés à AD, a pour exposant $-\frac{1}{2}$, & par conséquent cette suite est à son dernier terme DE multiplié par le nombre des termes AD, c'est-à-dire au quarré ABED, comme 1 est $-\frac{1}{2}+1$, ou comme 1 est à $\frac{1}{2}$, ou enfin comme 2 est à 1 ; ainsi l'espace indéfini DAXsE est double du quarré ABED, & par conséquent cet espace est fini.

54. La courbe que nous venons de décrire est une hyperbole équilatere du troisiéme dégré, & sa proprieté est que si l'on mene une ordonnée quelconque iN à l'asymptote Ad, le produit du quarré de cette ordonnée par son abscisse AN est toujours égal au cube de AB ; car à cause que les ordonnées Hi, BE, &c. à l'asymptote AX, sont réciproques aux quarrés de leurs abscisses, nous avons $Hi.\ BE :: \overline{BA}^2.\ \overline{AH}^2$; donc $Hi \times \overline{AH}^2 = \overline{BA}^2 \times BE = \overline{AB}^3$; or $Hi = AN$, & $iN = AH$, à cause des paralelles ; donc $AN \times \overline{iN}^2 = \overline{AB}^3$.

Au contraire si l'on mene une ordonnée quelconque Hi à l'asymptote AX, le produit de cette ordonnée par le quarré de son abscisse AH est toujours égal au cube de AB, ainsi qu'on vient de voir.

55. Si au lieu d'un complement de parabole quarrée, on prenoit un complement de premiere parabole cubique, & qu'après avoir pris des troisiémes proportionnelles à chacun de ses élemens & à son parametre, on achevât le reste comme ci-dessus, la courbe qu'on décriroit par ce moyen seroit une hyperbole du quatriéme dégré dont on découvriroit aisément les proprietés de même que de la précédente, on auroit les hyperboles des dégrés supérieurs, c'est-à-dire du cinquiéme dégré, du sixiéme,

&c. en employant des complemens de premiere parabole du quatriéme dégré, du cinquiéme, &c.

CHAPITRE II.

De la Méchanique.

56. La Mechanique est la Science du mouvement; elle comprend cinq parties, les loix du mouvement, la Statique, l'Hydrostatique, l'Airometrie, & l'Hydraulique.

57. On dit qu'un corps est en *mouvement*, lorsqu'il est transporté d'un lieu à un autre, & qu'il est en *repos* lorsqu'il ne change point de place.

58. La *Masse* d'un corps est la quantité de matiere qui le compose, & son volume est son extension en longueur, largeur & profondeur.

59. La *Force mouvante* d'un corps est ce qui donne le mouvement à ce corps.

60. La vitesse d'un corps est un effet de la force motrice, par lequel le corps parcourt un certain espace en un tems déterminé; de façon que si deux corps A, B, dans un même tems, ou dans des tems égaux parcourent des espaces égaux, leurs vitesses sont égales, & s'ils parcourent des espaces inégaux, leurs vitesses sont inégales; la plus grande est celle qui fait parcourir un plus grand espace, la moindre est celle qui fait parcourir un moindre espace.

61. La *direction* du mouvement d'un corps est la ligne droite le long de laquelle on conçoit que ce corps se meut.

Axiômes.

62. *Rien ne se fait dans la Nature sans quelque raison.* Si aujourd'hui une chose est d'une façon, & demain d'une autre, il y a certainement une raison de changement.

63. *Les effets sont proportionnels à leurs causes.* Si une cause produit un tel effet, il faut une cause double ou triple pour produire un effet double ou triple.

64. *Tout corps est indifférent au mouvement ou au repos.* Il est in-

capable de choix & de volonté, & par conſéquent il ne peut ſe mettre lui-même dans un état différent.

Delà il ſuit que ſi un corps paſſe du mouvement au repos, du repos au mouvement, ou d'une direction de mouvement à une autre, il y à néceſſairement quelque cauſe externe qui produit ces effets.

65. *Si un corps A double ou triple, &c. d'un autre corps* B, *parcourt un eſpace égal à celui que* B *parcourt dans un même tems, la force qui donne le mouvement au corps* A *eſt double, ou triple, &c. de la force motrice de* B. Suppoſons A double de B, je le coupe en deux parties égales entr'elles, & au corps B; ainſi il faudra deux forces égales à la force motrice de B, pour faire parcourir à ces deux parties un eſpace égal à celui que B parcourt; or la force qui meut le corps A tout entier, fait le même effet, donc, &c.

66. *Si un corps* A *égal à un autre corps* B *parcourt un eſpace double, triple, &c. de celui que* B *parcourt dans le même tems, la force motrice de* A *eſt double, ou triple, &c. de la force motrice de* B, à cauſe de l'égalité des corps A, B, la force de A fait le même effet que ſi la force de B faiſoit parcourir à B un eſpace double, triple, &c. de celui que B parcourt; or en ce cas la force de B ſeroit double, ou triple de ce qu'elle eſt, puiſque l'effet ſeroit double ou triple, &c. donc

67. On nomme *quantité de mouvement* d'un corps le produit de ſa maſſe par ſa viteſſe; car comme il faut plus de force lorſque la maſſe & la viteſſe ſont plus grandes, il eſt clair que pour eſtimer la quantité de mouvement, il faut avoir égard à ces deux choſes. La quantité de mouvement ſert à eſtimer la force motrice dont elle eſt l'effet, & à laquelle elle eſt par conſéquent proportionnelle.

Soient par exemple la maſſe du corps A = 1, celle du corps B = 2, la viteſſe de A = 1, celle de B égale à trois. La quantité de mouvement de A ſera donc 1, & celle de B ſera 6; & par conſéquent les forces de ces deux corps ſeront auſſi comme 1 à 6, puiſque ce ſeront ces forces qui auront produit ces quantités de mouvement, & que les cauſes ſont proportionnelles à leurs effets, & ceci ſe confirme encore par ce raiſonnement: ſi les viteſſes des corps A, B, étoient égales, la force du corps B ſeroit double de la force du corps A, à cauſe de la maſſe de B double de celle de A (*N.* 65.); or pour donner à B une viteſſe

triple de celle qu'il auroit dans cette supposition, il faut une force triple ; donc cette force doit être sextuple de celle de A, car le triple du double est le sextuple ; ainsi les forces de A & B doivent être comme 1 à 6, mais 1 est le produit de la masse 1 du corps A par sa vitesse 1, & 6 est le produit de la masse 2 du corps B par sa vitesse 3, donc les forces des deux corps sont entr'elles comme les produits des masses par les vitesses, ou comme les quantités de mouvement.

68. Le mouvement d'un corps se fait ou en *ligne droite*, ou en *ligne courbe*, en comprenant sous le nom de lignes courbes celles qui changent de tems en tems de direction, telle qu'est par exemple le circuit d'un polygone, & l'un & l'autre de ces mouvemens est ou uniforme, ou acceleré.

69. Le mouvement uniforme est celui par lequel un corps parcourt des espaces égaux dans des tems égaux.

70. Le mouvement acceleré est celui par lequel un corps parcourt dans des tems égaux des espaces qui vont en augmentant, & à ce mouvement répond le mouvement retardé par lequel un corps parcourt dans des tems égaux des espaces qui vont en diminuant.

71. Le mouvement ne peut s'accelerer que lorsqu'un corps reçoit d'un instant à l'autre des nouveaux accroissemens de vitesse, soit que ces accroissemens viennent de la part de la premiere force motrice, ou de la part d'autres forces qui le poussent dans son chemin ; ainsi on pourroit se former une infinité d'hypothèses d'accéleration : par exemple on pourroit concevoir que les accroissemens des vitesses seroient comme les tems, ou comme les quarrés des tems, ou comme leurs cubes, &c. ou comme quelques-unes de leurs racines, &c. mais pour ne pas nous arrêter à des spéculations inutiles à notre sujet, nous ne traiterons ici que du mouvement qu'on nomme uniformement acceleré, par lequel un corps reçoit dans des tems égaux des accroissemens égaux de vitesse. Ce mouvement est celui des corps qui par leur propre pesanteur tendent vers le centre de la terre.

72. Le mouvement se distingue encore en mouvement simple & en mouvement composé : le mouvement simple est celui qui est causé par une seule & unique force, & le mouvement composé est celui qui est produit par deux ou plusieurs forces qui ont des directions différentes, soit que ces forces soient uniformes ou accelerées, ou les unes uniformes & les autres accelerées.

Des Loix du Mouvement uniforme.

73. Proposition. I. *Dans le mouvement uniforme d'un corps, les espaces parcourus sont entr'eux comme les temps employés à les parcourir.*

Puisque dans le mouvement uniforme les espaces parcourus dans des tems égaux sont égaux, il est clair que si le corps A dans un tems quelconque, par exemple dans une minute, parcourt un espace quelconque, il doit dans un tems double, ou triple, &c. du premier, parcourir un espace double, ou triple de l'espace parcouru dans le premier; & que par conséquent le second espace parcouru doit être au premier, comme le second tems est au premier tems.

74. Pour abreger les démonstrations des Propositions suivantes dans lesquelles nous considerons deux corps A, B, en mouvement, nous nommerons V la vitesse du premier, T le tems de son mouvement, E l'espace qu'il parcourt, M sa masse, & Q sa quantité de mouvement; de même nous nommerons *u* la vitesse du second corps, *t* le tems de son mouvement, *e* l'espace qu'il parcourt, *m* sa masse, & *q* sa quantité de mouvement.

75. Proposition II. *Dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus par deux corps* A, B, *sont en raison composée des vitesses & des tems, c'est-à-dire les espaces parcourus sont entr'eux comme les produits des vitesses par les tems.*

Supposons d'abord que les vitesses & les tems soient égaux, les espaces parcourus E, *e*, seront par conséquent égaux; car on ne voit point de raison pour laquelle l'un des deux corps parcoureroit un plus grand espace que l'autre. Supposons en second lieu que les tems étant égaux, la vitesse V de A soit double de la vitesse *u* de B; il est clair qu'alors l'espace parcouru par A sera double de l'espace parcouru par B; car une vitesse double d'une autre fait parcourir en un même tems un espace double de l'espace que l'autre vitesse fait parcourir. Enfin supposons non-seulement que la vitesse V de A soit double de la vitesse *u* de B, mais encore que le tems T du mouvement de A, soit triple du tems *t* du mouvement de B. Il est encore visible que le corps A dans le tems T parcourera un espace triple de celui qu'il parcoureroit dans le tems *t* (*N.* 73.); or A dans le tems *t* parcoureroit un espace double de celui que B parcoureroit dans le même tems, à cause

de sa vitesse double ; donc A dans le tems T doit parcourir un espace sextuple de celui que B parcoureroit dans le tems *t* ; ainsi les espaces parcourus doivent être entr'eux comme 6 à 1, mais 6 est le produit de la vitesse V = 2 du corps A par son tems T = 3, & 1 est le produit de la vitesse *u* = 1 du corps B par son tems *t* = 1 ; donc nous avons E. *e* :: 6. 1 :: TV. *tu*.

76. De cette Proposition on peut déduire aisément grand nombre de Corollaires, ainsi qu'on va voir.

77. E. *e* :: TV. *tu* ; donc si l'on suppose T = *t*, on aura E. *e* :: V. *u*, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus par deux corps* A, B, *dans des tems égaux sont entr'eux comme les vitesses de ces corps.*

78. E. *e* :: TV. *tu* ; donc si l'on suppose V = *u*, on aura E. *e* :: T. *t*, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus par deux corps qui ont des vitesses égales sont entr'eux comme les tems employés à les parcourir.*

79. E. *e* :: TV. *tu* ; donc si l'on suppose V = *u*, & T = *t*, on aura E = *e*, ce qui est évident.

80. E. *e* :: TV. *tu* ; donc E*tu* = *e*TV, & partant V. *u* :: E*t*. *e*T ; c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme, les vitesses* V, u *de deux corps sont en raison composée de la raison directe des espaces* E, e, *& de la raison inverse* t, T *des tems* ; car la raison composée de ces deux raisons est E*t*, *e*T.

81. Puisque V. *u* :: E*t*. *e*T ; donc en divisant la seconde raison par T & par *t*, on aura V. *u* :: $\frac{E}{T}$. $\frac{e}{t}$, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme, les vitesses de deux corps sont entr'elles comme les espaces divisés par les tems.*

Et de même si dans V. *u* :: E*t*. *e*T on divise la derniere raison par *e*, & ensuite par E, on aura V. *u* :: $\frac{t}{e}$. $\frac{T}{E}$, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme les vitesses de deux corps sont entr'elles réciproquement comme les tems divisés par les espaces.*

82. E. *e* :: TV. *tu* ; donc E*tu* = *e*TV, & partant T. *t* :: E*u*. *e*V, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme les tems du mouvement de deux corps sont en raison composée de la raison directe* E, e, *des espaces, & de la raison inverse des vitesses* V, u.

83. Puisque T. *t* :: E*u*. *e*V, donc en divisant la derniere raison par *u* & par V, on aura T. *t* :: $\frac{E}{V}$. $\frac{e}{u}$, c'est-à-dire *dans le mouvement*

vement uniforme, les tems du mouvement de deux corps sont entr'eux comme les espaces divisés par les vitesses.

De même, si dans T. t :: Eu. eV, on divise la derniere raison par E & par e, on on aura T. t :: $\frac{u}{e}$. $\frac{V}{E}$, c'est-à-dire dans le mouvement uniforme de deux corps les tems sont entr'eux réciproquement comme les vitesses divisées par les espaces.

84. Proposition III. *Dans le mouvement uniforme les quantités de mouvement* Q, q, *de deux corps* A, B, *sont en raison composée de la raison des masses* M, m, *& des vitesses* V, u.

La quantité de mouvement selon sa Définition (*N.* 67.) est le produit de la masse par la vitesse; donc les quantités de mouvement des corps A, B, sont entr'elles comme MV, mu; mais cette raison est composée des deux M, m, & V, u; donc, &c.

85. Q. q :: MV. mu; donc si l'on suppose Q=q, on aura MV=mu, & partant M. m :: u. V, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme de deux corps, si les quantités de mouvement sont égales, les masses sont entr'elles réciproquement comme les vitesses.*

D'où il suit que si outre Q=q on suppose M=m, on aura V=u; de même si on suppose Q=q, & V=u, on aura M=m.

86. Q. q :: MV. mu; donc Qmu=qMV, & par conséquent V. u :: Qm. qM, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme de deux corps, les vitesses sont en raison composée de la raison directe des quantités de mouvement* Q, q, *& de la raison inverse* m, M, *des masses.*

87. Q. q :: MV. mu; donc Qmu=qMV, & partant M. m :: Qu. qV, c'est-à-dire dans le mouvement uniforme de deux corps, les masses M, m, sont entr'elles en raison composée de la raison directe des quantités de mouvement Q, q, & de la raison inverse u, V, des vitesses.

88. Nous avons trouvé ci-dessus V. u :: Et. eT (*N.* 80.) si l'on multiplie donc les termes de cette proportion par ceux de la proportion Q. q :: MV. mu, nous aurons QV. qu :: MVEt. mueT, ou QV. MVEt :: qu. mueT, d'où l'on tirera grand nombre d'autres Corollaires, ainsi qu'on va voir.

89. QV. MVEt :: qu. mueT; donc en divisant la premiere raison par V, & la seconde par u, on aura Q. MEt :: q. meT, ou Q. q :: MEt. meT, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme de deux corps les quantités de mouvement sont en raison composée de la raison directe* M, m, *des masses, de la raison directe* E, e, *des espaces, & de la raison inverse* t, T, *des tems.*

90. Puisque Q. *q* :: ME*t*. *me*T, donc Q*me*T=*q*ME*t*, & partant E. *e* :: Q*m*T. *q*M*t*, c'est-à dire *dans le mouvement uniforme de deux corps, les espaces parcourus sont en raison composée de la raison directe des quantités de mouvement* Q, q, *de la raison directe des tems* T, t, *& de la raison inverse* m, M, *des masses*.

91. Q. *q* :: ME*t*. *me*T, donc Q*me*T=*q*ME*t*, & par conséquent M. *m* :: Q*e*T. *q*E*t*, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme de deux corps, les masses sont entr'elles en raison composée de la raison directe* Q, q, *des quantités de mouvement, de la raison directe* T, t, *des tems & de la raison inverse* e, E, *des espaces*.

92. Q. *q* :: ME*t*. *me*T, donc Q*me*T=*q*ME*t*, & partant T. *t* :: *q*ME. Q*me*, c'est-à-dire *dans le mouvement uniforme de deux corps, les tems sont entr'eux en raison composée de la raison directe des masses* M, m, *de la raison directe des espaces* E, e, *& de la raison inverse* q, Q, *des quantités de mouvement*.

93. Si dans les analogies des Corollaires précédens on suppose quelques grandeurs égales entr'elles, on en tirera encore d'autres conséquences: par exemple si dans Q. *q* :: ME*t*. *me*T; on suppose Q=*q*, on aura ME*t* = *me*T; donc 1°. T. *t* :: ME. *me*, c'est-à-dire *les quantités de mouvement étant égales, les tems sont entr'eux en raison composée des raisons directes des masses & des espaces*. 2°. E. *e* :: *m*T. M*t*, c'est-à-dire *les quantités de mouvement étant égales, les espaces sont en raison composée de la raison directe des tems & de la raison inverse des masses*. 3°. M. *m* :: *e*T. E*t*, c'est-à-dire *les quantités de mouvement étant égales, les masses sont en raison composée de la raison directe des tems & de la raison inverse des espaces*, & ainsi des autres.

Des Loix du Mouvement uniformement acceleré.

94. Le mouvement uniformement acceleré comme nous avons dit est celui dont la vitesse reçoit dans des tems égaux des accroissemens égaux, c'est-à-dire que si dans le premier instant le corps a un dégré de vitesse, dans le second il en a deux, dans le troisiéme il en a trois, & ainsi de suite,

95. On a éprouvé que la pesanteur des corps est toujours la même dans tous les lieux où on a pû faire des experiences, soit au-dessus de la surface de la Terre, soit en dessous, & que les corps pesans tendent vers le centre de la Terre avec un mouvement qui s'accelere ; or c'est sur ces expériences qu'est fondée la doctrine du mouvement acceleré dont Galilée est l'inventeur.

96. PROPOSITION III. *Dans le mouvement uniformement acceleré, les espaces parcourus dans des tems égaux infiniment petits & successifs les uns aux autres, sont entr'eux comme les nombres 1. 2. 3. 4. 5, &c.*

Pendant le premier instant la force motrice donnant au corps un premier dégré de vitesse lui fait parcourir un petit espace qu'on peut regarder comme étant uniformement parcouru à cause de la durée infiniment petite de ce premier instant ; ainsi si l'on supposoit que la force motrice ne donnât point une nouvelle impression au corps dans le second instant, ce corps ne laisseroit pas que de continuer à se mouvoir en vertu de la premiere vitesse reçue, à moins que quelque obstacle ne s'opposât à lui, & il parcoureroit pendant le second instant un espace égal à celui qu'il auroit parcouru pendant le premier, puisqu'il auroit le même dégré de vitesse ; mais comme la force motrice lui donne dans ce second instant un second dégré de vitesse égal au premier, au lieu d'un espace il en parcourt deux, égaux chacun au premier. De même si l'on supposoit encore que la force motrice au second instant n'agît plus sur le corps, néanmoins ce corps en vertu des deux dégrés de vitesse reçus dans les deux premiers instans parcoureroit un espace égal à celui qu'il auroit parcouru dans le second, c'est-à-dire un espace double de l'espace parcouru dans le premier, mais comme la force motrice lui donne encore un nouveau dégré de vitesse égal au premier, au lieu de deux espaces il en parcourt trois égaux chacun à l'espace parcouru dans le premier instant, & par un semblable raisonnement il est aisé de voir qu'au quatriéme instant le corps doit parcourir un espace quadruple du premier, au cinquiéme un espace quintuple, &c. & que par conséquent les espaces parcourus dans des instans infiniment petits, égaux & successifs doivent être comme les nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6, &c.

97. La vitesse du corps à la fin d'un instant quelconque se nomme *vitesse acquise* ; ainsi la vitesse acquise du troisiéme instant est 3, celle du quatriéme est 4, &c.

98. Soit la hauteur AB d'un triangle ABM (*Fig.* 23.) divisée en une infinité de parties égales, & des points de division soient menés les élemens CD, EF, &c. si l'on conçoit que la hauteur AB represente le tems ou la durée du mouvement d'un corps qui se meut avec une vitesse uniformement accelerée, les petites parties de cette ligne representeront les instans infiniment

petits égaux & successifs, & les élemens CD, EF, &c. representeront les espaces parcourus pendant ces instans, de même que les vitesses acquises à la fin de ces instans ; de façon que les espaces parcourus pendant chacun de ces instans sont entr'eux comme les vitesses acquises à la fin de chacun de ces instans, avec cette différence cependant que chaque espace est parcouru tout entier dans l'instant auquel il appartient, au lieu que chaque vitesse acquise n'a qu'une partie qui ait été produite dans l'instant auquel elle appartient: je m'explique, l'espace EF parcouru dans le second instant est parcouru tout entier dans ce second instant, au contraire la vitesse EF acquise à la fin du second instant n'est pas produite toute entiere dans ce second instant; mais l'une de ses parties EN est la même que la vitesse CD acquise à la fin du premier instant, & l'autre partie NF est produite dans le second; ainsi la vitesse acquise à la fin d'un instant quelconque est la somme de toutes les vitesses instantanées de tous les instans depuis le commencement du mouvement, au lieu que l'espace d'un instant est parcouru tout entier dans un instant. Par exemple la vitesse SR acquise à la fin du quatriéme instant n'est autre chose que la vitesse CD acquise à la fin du premier, plus la vitesse NF acquise du premier au second, plus la vitesse IH acquise du second au troisiéme, plus la vitesse QR acquise du troisiéme au quatriéme, tandis que l'espace SR est parcouru tout entier dans le quatriéme instant, ce qui met une grande différence entre les espaces parcourus dans les instans infiniment petits égaux & successifs, & les vitesses acquises à la fin de ces instans.

99. PROPOSITION IV. *Dans le mouvement uniformement acceleré, les espaces parcourus dans des tems égaux, successifs & sensibles, c'est-à-dire qui ne sont pas infiniment petits, sont entr'eux comme les nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9, &c.*

Concevons que la hauteur AB du triangle ABM (*Fig.* 24.) represente le tems, ou la durée du mouvement d'un corps dont la vitesse est uniformement accelerée ; si cette hauteur étoit divisée en parties égales & infiniment petites, & que des points de division on menât les élemens du triangle paralelles à la base, les parties infiniment petites de AB representeroient les instans infiniment petits, égaux & successifs dont le tems AB est composé, & les élemens du triangle representeroient les espaces parcourus dans ces instans.

Maintenant concevons que AB ſoit diviſée en quatre parties égales AC, CE, EG, GB, ces parties repreſenteront des parties égales du tems AB, leſquelles ne ſeront pas infiniment petites; or l'eſpace parcouru pendant le tems ſenſible AC n'étant autre choſe que la ſomme des eſpaces parcourus pendant les inſtans infiniment petits qui compoſent le tems AC, ſera par conſéquent la ſomme des élemens du triangle ACD, c'eſt-à-dire cet eſpace ſera repreſenté par le triangle ACD; par la même raiſon l'eſpace parcouru pendant le tems AE compoſé des deux premiers AC, CE, ſera repreſenté par le triangle AEF, l'eſpace parcouru pendant le tems AG compoſé des trois premiers AC, CE, EG, ſera repreſenté par le triangle AGH; enfin l'eſpace parcouru pendant le tems compoſé des quatre AC, CE, EG, GB ſera repreſenté par le triangle ABM; or les quatre triangles ACD, AEF, AGH, ABM, étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs hauteurs AC, AE, AG, AB, leſquelles ſont comme les nombres 1. 2. 3. 4; donc ces triangles ſont entr'eux comme les quarrés 1. 4. 9. 16; ainſi les eſpaces parcourus dans le premier tems, dans les deux premiers, dans les trois premiers, & dans les quatre premiers, ſont entr'eux comme ces nombres 1. 4. 9. 16; mais ſi de l'eſpace 4 parcouru dans les deux premiers tems on retranche l'eſpace 1 parcouru dans le premier tems, le reſte 3 ſera l'eſpace parcouru dans le ſecond tems. De même ſi de l'eſpace 9 parcouru dans les trois premiers tems on retranche l'eſpace 4 parcouru dans les deux premiers, le reſte 5 ſera l'eſpace parcouru dans le troiſiéme tems; enfin ſi de l'eſpace 16 parcouru dans les quatre premiers tems, on retranche l'eſpace 9 parcouru dans les trois premiers, le reſte 7 ſera l'eſpace parcouru dans le quatriéme tems, & ainſi de ſuite; or les eſpaces 1. 3. 5. 7, &c. ſont la ſuite des nombres impairs, donc, &c.

100. *Les eſpaces parcourus à la fin du premier tems, des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, &c. ſont entr'eux comme les quarrés des viteſſes acquiſes à la fin de ces tems.* Par la Démonſtration précédente les eſpaces parcourus à la fin du premier tems, des deux premiers, des trois premiers, &c. ſont entr'eux comme les quarrés de ces tems; or les viteſſes acquiſes à la fin de ces mêmes tems, ſont entr'elles comme les tems, car la viteſſe acquiſe à la fin du premier tems étant 1, celle qui eſt acquiſe à la fin du ſecond, c'eſt-à-dire à la fin des deux premiers eſt 2, celle qui eſt acquiſe à la fin des trois premiers eſt 3,

&c. à cause que la vitesse reçoit des accroissemens égaux dans des tems égaux ; donc les espaces parcourus à la fin des tems, en comptant toujours les tems depuis l'origine du mouvement, sont entr'eux comme les quarrés des vitesses acquise à la fin des mêmes tems.

101. PROPOSITION V. *Les corps pesans descendent vers le centre de la Terre avec un mouvement uniformement acceleré.*

Par l'expérience les corps pesans descendent vers le centre de la Terre avec un mouvement qui s'accelere (*N.* 95.) & cette accélération ne peut venir que de leur pesanteur qui les pousse à chaque instant ; car si leur pesanteur ne leur donnoit qu'une premiere impression, leur mouvement seroit uniforme ; or la pesanteur est la même partout (*N.* 95.) ; donc à chaque instant elle donne une nouvelle impression au corps égale à la premiere, & par conséquent les dégrés de vitesse que le corps reçoit à chaque instant sont égaux entr'eux ; mais quand les accroissemens de vitesse sont égaux dans des tems égaux, le mouvement est uniformément acceleré ; donc les corps graves descendent vers le centre de la Terre avec un mouvement uniformement acceleré.

102. Donc si l'on divise le tems de la descente d'un corps en parties sensibles, par exemple en secondes, les espaces parcourus dans la premiere seconde, dans les deux premieres, dans les trois premieres, &c. seront comme les quarrés 1. 4. 9, &c. de ces tems, ou comme les quarrés des vitesses acquises à la fin de ces tems.

103. *Nota.* Que tout ceci ne doit s'entendre que des corps qui ne sont pas à une distance trop grande de la surface de la Terre ; car comme on ne peut pas faire des expériences à des distances si grandes, nous ne pouvons pas sçavoir non plus si cette loi d'accéleration est la même partout.

104. PROPOSITION VI. *Si un corps grave descend vers le centre de la Terre pendant un tems déterminé, l'espace parcouru à la fin de ce tems, n'est que la moitié de l'espace qu'il auroit parcouru dans le même tems s'il s'étoit mû d'un mouvement uniforme, & avec une vitesse égale à celle qu'il a acquise à la fin de ce tems.*

Concevons que la hauteur AB du triangle ABM (*Fig.* 24.) represente le tems pendant lequel le corps est descendu, si l'on divise cette hauteur en une infinité de parties égales qui representeront les instans infiniment petits dont le tems AB est composé, les élemens du triangle menés des points de division re-

presenteront les espaces parcourus dans ces instans, & la base BM representera l'espace parcouru dans le dernier instant, de même que la vitesse acquise à la fin de cet instant ; or si le corps s'étoit mû pendant le tems AB avec une vitesse uniforme égale à BM, c'est-à-dire qui dans un instant lui auroit fait parcourir un espace égal à BM, ce corps dans chacun des instans du tems AB auroit parcouru un espace égal à BM, & par conséquent l'espace total parcouru dans le tems AB auroit été BM pris autant de fois qu'il y a d'instans dans AB ou BM multiplié par AB, c'est-à-dire l'espace total parcouru par le mouvement uniforme auroit été representé par le rectangle ABM*m*, mais le triangle ABM qui represente l'espace total parcouru par le mouvement uniformement acceleré, n'est que la moitié du rectangle ABM*m*, donc, &c.

105. PROBLEME. *Connoissant l'espace parcouru d'un mouvement acceleré pendant un tems, connoître celui que le corps doit parcourir dans un autre tems, en supposant que les deux tems doivent commencer tous les deux à l'origine du mouvement.*

Supposons que le corps dans une minute ait parcouru trois pieds, & qu'on demande combien il en auroit parcouru si le mouvement avoit duré trois minutes. Je fais les quarrés 1. 9. des tems, une minute, trois minutes ; & je dis par Regle de Trois, 1 est à 9 comme l'espace trois pieds est à un quatriéme terme 27 qui est l'espace que le corps auroit parcouru dans trois minutes ; car les espaces 3 & 27 parcourus dans les tems, une minute & trois minutes sont entr'eux comme les quarrés de ces tems (*N. 99.*)

106. PROBLEME. *Connoissant l'espace parcouru d'un mouvement uniformement acceleré dans un certain tems, connoître celui qui devroit être parcouru dans un autre tems, en supposant que ce second tems ne doit commencer qu'à la fin du premier tems.*

Supposons que le corps dans une minute parcoure trois pieds, & qu'on demande combien il en doit parcourir dans les deux minutes suivantes ; j'ajoute au second tems le premier tems 1, ce qui fait 3 ; ainsi j'ai deux tems 1 & 3 qui commencent à l'origine du mouvement. Faisant donc les quarrés 1 & 9 de ces tems, je dis par Regle de Trois : le quarré 1 du premier tems est au quarré 9 du second comme l'espace trois pieds parcouru dans le premier est à un quatriéme terme 27 qui est l'espace parcouru dans le second ; retranchant donc de cet espace 27 l'espace 3

parcouru dans le premier tems une minute, le reste 24 est l'espace parcouru dans les deux minutes suivantes.

107. PROBLEME. *Connoissant le tems pendant lequel un corps a parcouru d'un mouvement uniformement acceleré un certain espace, connoître le tems pendant lequel il parcoureroit un autre espace déterminé, en supposant que les deux tems doivent commencer tous les deux à l'origine du mouvement.*

Supposons que le corps ait parcouru huit pieds dans deux minutes, & qu'on demande dans combien de tems il en parcourera 50: je fais le quarré 4 du premier tems deux minutes, & je dis par Regle de Trois: l'espace huit pieds parcouru dans le premier tems deux minutes, est à l'espace 50 qui doit être parcouru dans le second, comme le quarré 4 du premier tems est à un quatriéme terme 25 qui est le quarré du second tems. Tirant donc la racine quarrée 5 de ce quarré, je dis que le corps parcoureroit 50 pieds dans 5 minutes à compter depuis l'origine du mouvement.

108. PROBLEME. *Connoissant le tems pendant lequel un corps a parcouru un espace déterminé, connoître le tems pendant lequel il parcoureroit un autre espace déterminé, en supposant que ce second tems ne doit commencer qu'à la fin du premier.*

Supposons que le corps ait parcouru huit pieds dans deux minutes, & qu'on demande combien il lui faudroit de tems pour parcourir 42 pieds si son mouvement continuoit; j'ajoute 8 pieds à 42, ce qui fait 50, ainsi 50 pieds sont l'espace que le corps parcoureroit pendant le tems qu'on demande, joint aux deux premieres minutes, & ces deux espaces 8 pieds & 50 pieds seroient parcourus l'un & l'autre depuis l'origine du mouvement; c'est pourquoi faisant le quarré 4 du premier tems deux minutes, je dis par Regle de Trois: 8 pieds parcourus dans le premier tems deux minutes sont à 50 pieds que le corps parcoureroit dans le tems qu'on demande joint au premier tems 2 minutes, comme le quarré 4 du premier tems est à un quatriéme terme 25 qui est le quarré de la somme du tems demandé & du premier tems. Tirant donc la racine quarrée 5, cette racine sera la somme du tems demandé & du premier; or puisque dans 5 minutes le corps parcoureroit 50 pieds, & que dans les deux premieres il en parcourt 8, il doit parcourir les 42 autres dans les trois minutes suivantes, ainsi il faudroit que le corps continuât à se mouvoir encore pendant trois minutes.

109 PROBLEME. *Connoissant l'espace parcouru pendant un certain tems, connoître les espaces parcourus dans toutes les parties de ce tems.*

Supposons que le corps ait parcouru 50 pieds dans 5 minutes, je nomme x l'espace parcouru dans la premiere minute, & faisant les quarrés 25 & 1 des tems 5 minutes & une minute, je dis par Regle de Trois : le quarré 25 du tems 5 minutes, est au quarré 1 du tems une minute, comme l'espace 50 parcouru dans le tems 5 est à un quatriéme terme 2 qui sera l'espace x parcouru dans la premiere; or les espaces parcourus dans la premiere minute, dans la seconde, dans la troisiéme, dans la quatriéme, &c. sont x. $3x$. $5x$. $7x$, &c. (*N.* 99.); mettant donc 2 au lieu de x, nous aurons 2. 6. 10. 14, &c. 18 pour les espaces parcourus pendant chacune de 5 minutes, & en effet ces 5 espaces font l'espace total parcouru dans les 5 minutes.

110. PROBLEME. *Connoissant le tems total du mouvement, & l'espace parcouru pendant une partie de ce tems, laquelle n'a pas commencé à l'origine du mouvement, trouver l'espace parcouru dans toutes les parties du tems.*

Supposons que la durée du mouvement ait été 5 minutes, & que pendant les deux dernieres le corps ait parcouru 32 pieds, je nomme x l'espace parcouru dans la premiere minute, donc l'espace parcouru dans la seconde sera $3x$, celui qui aura été parcouru dans la troisiéme sera $5x$, celui de la quatriéme sera $7x$, & celui de la cinquiéme $9x$, & par conséquent l'espace parcouru dans les deux dernieres, c'est-à-dire pendant la quatriéme & la cinquiéme sera $7x + 9x = 16x$, & nous aurons $16x = 32$; donc $x = 2$, ainsi l'espace parcouru dans la premiere minute sera 2 pieds, & mettant cette valeur de x dans $3x$. $5x$. $7x$, & $9x$, nous aurons 6. 10. 14 & 18 pour les espaces parcourus dans la seconde minute, dans la troisiéme, la quatriéme, & la cinquiéme.

111. PROPOSITION VII. *Dans le mouvement uniformement retardé, les espaces qu'un corps parcourt dans des tems infiniment petits égaux & successifs, sont entr'eux comme les nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6, &c. pris en rétrogradant.*

Le mouvement uniformement retardé est celui où le corps souffre à chaque instant des diminutions égales de vitesse. Cela posé.

Nous avons démontré ci-dessus que lorsqu'un corps se meut d'un mouvement uniformement acceleré, c'est-à-dire lorsqu'il reçoit à chaque instant des dégrés égaux de vitesses, les espaces

qu'il parcourt dans des tems infiniment petits, égaux & successifs augmentent toujours de la même quantité, & sont par conséquent comme les nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6, &c. pris directement; donc quand le corps se meut d'un mouvement uniformement retardé, c'est-à-dire lorsqu'il perd à chaque instant des dégrés égaux de vitesse, les espaces parcourus dans des instans infiniment petits, égaux & successifs, doivent diminuer toujours de la même quantité, & par conséquent ces espaces doivent être comme les nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6, pris en rétrogradant.

112. Donc si la hauteur BA du triangle ABM (*Fig.* 23.) represente la durée du mouvement uniformement retardé d'un corps, les parties infiniment petites & égales de cette hauteur representeront les instans infiniment petits, égaux & successifs qui composent le tems total du mouvement, & les élemens de ce triangle, à commencer depuis la base BM representeront les espaces parcourus dans des instans infiniment petits, égaux & successifs, & les vitesses restantes à la fin de ces tems. Par exemple supposons que le corps commence à se mouvoir avec une vitesse égale à BM, c'est-à-dire avec une vitesse qui dans un petit instant lui feroit parcourir un espace égal à BM, l'espace qui se trouvera parcouru à la fin du premier instant, sera representé par l'élement du triangle qui vient après BM, & qui est moindre que BM, à cause que la vitesse à la fin de cet instant est moindre. De même l'espace qui sera parcouru à la fin du second instant sera representé par le troisiéme élement du triangle, & ainsi de suite.

113. Proposition VIII. *Dans le mouvement uniformement retardé, les espaces qu'un corps parcourt dans des tems égaux, successifs, mais sensibles, sont entr'eux comme les nombres impairs 1. 3. 5. 7. &c. pris en rétrogradant.*

Supposons que la base BM du triangle ABM (*Fig.* 24.) represente la vitesse avec laquelle le corps commence à se mouvoir, c'est-à-dire une vitesse qui dans un tems infiniment petit lui feroit parcourir un espace égal à BM, & que la hauteur AB de ce triangle represente la durée du mouvement que nous supposerons de 4 minutes; je divise cette hauteur en quatre parties égales qui par conséquent representeront chacune une minute; ainsi l'espace parcouru dans la premiere minute sera representé par le trapezoïde GHMB; car cet espace n'est autre chose que la somme des espaces parcourus pendant les tems infiniment petits,

égaux & ſucceſſifs qui compoſent la premiere minute, c'eſt-à-dire la ſomme des élemens du trapezoïde GHBM; par la même raiſon, l'eſpace parcouru dans la ſeconde minute GE ſera repreſenté par le trapezoïde EFHG, l'eſpace parcouru pendant la troiſiéme minute ſera repreſenté par le trapezoïde CDFE, & l'eſpace parcouru pendant la quatriéme minute ſera le triangle ACD; or les triangles ABM, AGH, AEF, ACD, étant entr'eux comme les quarrés de leurs hauteurs AB, AG, AE, AC, ſont par conſéquent entr'eux comme les nombres 16. 9. 4. 1; donc ſi du premier triangle ABM=16, je retranche le ſecond triangle AGH=9, le reſte 7 ſera le trapezoïde GBHM; de même ſi du ſecond triangle AGH=9, je retranche le troiſiéme AEF=4, le reſte 5 ſera le trapezoïde EFGH; enfin ſi du troiſiéme triangle AEF=4, je retranche le dernier ACD=1, le reſte 3 ſera le trapezoïde CDFE; donc les trois trapezoïdes & le dernier triangle ACD, feront entr'eux comme 7. 5. 3. 1, & par conſéquent les eſpaces parcourus pendant chacune des 4 minutes, feront entr'eux comme ces mêmes nombres, c'eſt-à-dire comme les nombres impairs 1. 3. 5. 7, &c. pris en rétrogradant.

114. PROPOSITION IX. *Si un corps peſant eſt pouſſé de bas en haut par une force quelconque, ſon mouvement eſt uniformement retardé.*

Tandis que le corps monte par l'impreſſion de la force motrice ſa peſanteur lui donne à chaque inſtant des impreſſions contraires qui lui font perdre des dégrés égaux de viteſſe: or quand un corps en mouvement perd des dégrés égaux de viteſſe, ſon mouvement eſt uniformement retardé; donc, &c.

115. PROPOSITION X. *Si un corps peſant qui eſt deſcendu pendant un certain tems vers le centre de la Terre, eſt repouſſé de bas en haut avec une viteſſe égale à celle qu'il a acquiſe à la fin de ce tems, ce corps dans un ſecond tems égal au premier, remonte à une hauteur égale à celle dont il eſt deſcendu, & parcourt le même eſpace.*

Suppoſons que dans 4 minutes repreſentées par les quatre parties égales AC, CE, EG, GB, de la hauteur AB (*Fig.* 24) du triangle ABM, le corps parcoure en deſcendant un eſpace repreſenté par le triangle ABM, l'eſpace parcouru dans la premiere minute ſera donc repreſenté par le triangle ACD, celui qui eſt parcouru dans la ſeconde par le trapezoïde CDFE, celui qui eſt parcouru dans la troiſiéme, par le trapezoïde EFHG, & celui qui eſt parcouru dans la quatriéme par le trapezoïde GHMB: or ſi la peſanteur ceſſoit d'agir à la fin de la premiere minute AC,

le corps en vertu de sa vitesse acquise CD à la fin de cet instant parcoureroit un espace representé par le paralellogramme CDNE; car dans cette supposition sa vitesse CD étant uniforme, lui feroit parcourir dans chacun des instans infiniment petits qui composent la seconde minute CE un espace égal à CD; donc l'espace que la pesanteur fait parcourir dans la seconde minute indépendamment de la vitesse acquise à la fin de la premiere, est le petit triangle DNF égal au triangle ACD parcouru dans la premiere minute. De même si la pesanteur cessoit d'agir à la fin de la seconde minute, le corps en vertu de sa vitesse acquise EF à la fin de cette minute parcoureroit dans la troisiéme minute le paralellogramme EFRG, & par conséquent l'espace que la pesanteur fait parcourir dans cette troisiéme minute indépendamment de la vitesse acquise, est le triangle FRH égal au triangle ACD parcouru dans la premiere minute; & par la même raison l'espace que la pesanteur fait parcourir dans la quatriéme minute indépendamment de la vitesse acquise à la fin de la troisiéme, est le triangle HPM égal au triangle ACD; de façon que les espaces que la pesanteur fait parcourir dans chacune des quatre minutes indépendamment des vitesses acquises à la fin de ces minutes, sont tous égaux entr'eux.

Maintenant supposons qu'une force repousse le corps de bas en haut avec une vitesse égale à la vitesse acquise BM à la fin des 4 minutes. Ce corps s'il ne trouvoit point d'obstacles parcoureroit dans la premiere minute GB le paralellogramme GSMB; car dans cette supposition sa vitesse BM étant uniforme, lui feroit parcourir dans chacun des instans infiniment petits qui composent la minute GB un espace égal à BM; mais comme la pesanteur qui s'oppose à son passage, lui fait perdre pendant cette minute un dégré de vitesse égal à celui qu'elle lui donneroit s'il descendoit, cette pesanteur l'empêche de parcourir un petit triangle HSM égal au triangle HPM ou ACD; ainsi le corps ne doit parcourir dans cette minute que le trapezoïde GHMB qu'il a parcouru pendant la quatriéme minute lorsqu'il descendoit. De même si à la fin de la premiere minute GB la pesanteur cessoit d'agir, le corps en vertu de sa vitesse restante GH parcoureroit le paralellogramme GHTE, pendant la seconde minute GE; mais comme la pesanteur l'empêche de parcourir le petit triangle TEH égal au triangle ADC, il ne parcourt que le trapezoïde: par la même raison il parcourt dans la troisiéme minute

CE, le trapezoïde EFDC, & dans la quatriéme CA, le triangle ACD; or les trois trapezoïdes BMHG, GHFE, EFDC joints au triangle ADC, composent le triangle total ABM, c'est-à-dire l'espace parcouru en descendant pendant quatre minutes; donc le corps parcourt en remontant pendant 4 minutes le même espace qu'il avoit parcouru en descendant pendant quatre minutes.

116. **Proposition XI.** *Si deux ou plusieurs corps pesans inégaux entr'eux descendent vers le centre de la Terre, les espaces qu'ils parcourent dans un même tems sont égaux entr'eux.*

Supposons qu'un corps A ait une masse double de celle d'un autre corps B, & que l'un & l'autre descendent vers le centre de la Terre pendant une minute, je conçois que A soit divisé en deux parties C, D, égales entr'elles, & par conséquent égales chacune à la masse du corps B; donc la partie C en descendant pendant une minute, décrira un espace égal à celui que B parcourt; car les masses C & B étant égales, il n'y a pas de raison de dire que la pesanteur de l'une soit plus grande que la pesanteur de l'autre. De même la partie D décrira pendant une minute un espace égal à celui que B décrit, & par conséquent C & D descendant ensemble, décriront encore le même espace, mais D & C pris ensemble composent le corps A ; donc A doit parcourir dans une minute le même espace que B.

117. *Nota.* Que je suppose ici que les corps descendent dans un milieu qui ne leur fait point de résistance; c'est pourquoi si l'expérience est quelquefois contraire à ce que je viens de dire, cela vient de la résistance de l'air.

Remarque. La doctrine du mouvement uniformement acceleré ou retardé a fait tomber l'un des plus grands Genies de notre siécle, je veux dire M. Leibnitz dans une erreur assez sensible qui ne laisse pas que d'avoir encore de célebres Partisans. M. Leibnitz distingue dans le mouvement uniformement acceleré ou retardé deux sortes de force, l'une qu'il appelle force *morte*, & l'autre force *vive*. La force morte est celle qui pousse un corps sans pouvoir vaincre l'obstacle qui s'oppose à son mouvement, telle est la pesanteur, lorsqu'elle pousse un corps qui se trouve arrêté invinciblement par un plan horizontal. La force vive est celle qui meut actuellement le corps. Selon cet illustre Auteur, les forces mortes sont entr'elles comme les produits des masses par les vitesses qu'elles tendent à donner au corps, & les forces vives sont comme les produits des masses par les quarrés des

vitesses : or voici sur quoi il fonde cette prétention.

Supposons que deux corps A, B, (*Fig.* 25.) descendent vers le centre de la Terre, l'un pendant deux minutes AC, CD, & l'autre pendant trois minutes BE, EF, FG, les espaces parcourus par ces corps seront representés par les triangles semblables ADH, BGL, qui sont entr'eux comme les quarrés des tems AD, BG, pendant lesquels leur mouvement aura duré, & les vitesses acquises à la fin de ces tems seront representées par les bases DH, GL, de ces triangles, lesquelles sont entr'elles comme leur hauteur. Maintenant supposons que ces corps après avoir parcouru leurs espaces soient repoussés en haut avec leurs vitesses acquises, ils parcoureront dans des tems égaux aux premiers les mêmes espaces en remontant, qu'ils auront parcouru en descendant; & à la fin de ces espaces, les forces qui les feront remonter seront détruites, & la pesanteur recommencera à faire descendre ces corps vers le centre de la Terre ; donc, conclut M. de Leibnitz, puisque ces forces se consomment à faire parcourir aux corps ces espaces, il faut qu'elles soient entr'elles comme les masses multipliées par les espaces, mais les espaces sont comme les quarrés des vitesses ; donc les forces sont ici oomme les masses multipliées par les quarrés des vitesses.

Pour faire voir la fausseté de ce raisonnement, je dis 1°. que les forces de ces deux corps ne sont point détruites à cause des espaces qu'ils ont parcourus, mais à cause des obstacles qu'ils ont rencontrés, c'est-à-dire des impressions contraires de la pesanteur. En effet concevons que lorsque ces corps sont repoussés en haut avec leurs vitesses acquises DH, GL, la pesanteur cesse d'agir sur eux ; il est clair que le premier, en vertu de sa vitesse DH qui dans cette supposition sera uniforme, parcourera dans la premiere minute DC, en remontant le paralellogramme DCMH, & que le second en vertu de sa vitesse GL parcourera dans la premiere minute GF, le paralellogramme GFPL, que les forces de ces deux corps seront entr'elles comme les produits des masses par leurs vitesses DH, GL, à cause que les espaces parcourus dans des tems égaux, où les paralellogrammes DCMH, GFPL, ayant les hauteurs égales seront entr'eux comme leurs bases DH, GL, & qu'enfin ces forces n'auront rien perdu pour avoir fait parcourir ces espaces, puisque dans un second tems égal au premier, dans un troisiéme, dans un

quatriéme, & ainsi de suite à l'infini elles feroient parcourir aux corps des espaces égaux aux premiers, si nul obstacle étranger ne s'opposoit à leur mouvement.

En second lieu, je dis que si les deux corps A, B, en remontant parcourent les espaces ADH, BGL, qui sont entr'eux comme les quarrés de leurs vitesses, cela ne provient pas de la nature de leurs forces, mais uniquement de la nature des obstacles qu'ils rencontrent, lesquels ne sont pas proportionnels aux vitesses; car la pesanteur du corps A s'opposant à son mouvement pendant la premiere minute DC, l'empêche de parcourir le petit espace HMN égal à l'espace NZH qu'elle lui a fait parcourir pendant la seconde minute lorsqu'il descendoit, indépendamment de la vitesse acquise à la fin de la premiere; de même la pesanteur du corps B s'opposant à son mouvement pendant la premiere minute GF, l'empêche de parcourir le petit espace QPL, & en conséquence de ces deux espaces HMN, QPL, non parcourus, chacun des corps perd un dégré de vitesse; or un dégré de vitesse à l'égard de la vitesse 2 du premier corps, est plus grand qu'un dégré de vitesse à l'égard de la vitesse 3 du second; & par conséquent les obstacles que ces deux corps ont rencontré dans le même tems ne sont pas proportionnels à leurs vitesses. Il est aisé de voir que dans la seconde minute la pesanteur empêchant le corps A de parcourir le petit espace ARN, & le second de parcourir le petit espace TSQ ôte à chacun de ces corps encore un dégré de vitesse qui n'est pas proportionnel à leurs vitesses restantes; car 1 est plus grand par rapport à la vitesse restante 1 du premier corps, que par rapport à la vitesse restante 2 du second, donc, &c.

En troisiéme lieu, je dis que les forces des deux corps A, B, sont entr'elles comme les masses multipliées par les vitesses, & non pas comme les masses multipliées par les quarrés des vitesses; car les forces sont entr'elles comme les obstacles qui les détruisent. Une force, par exemple capable de faire parcourir à un corps deux pieds dans une minute, selon une certaine direction, ne peut être détruite que par une autre force qui dans la même minute feroit parcourir à ce corps deux pieds dans une direction opposée, ou par un obstacle équivalent. Examinons donc quels sont les obstacles que nos deux corps rencontrent, le premier A pendant la premiere minute trouve un obstacle qui l'empêche de parcourir le petit espace NMH, ou qui lui feroit

parcourir le même espace dans une direction opposée, & pendant la seconde minute, il rencontre un obstacle qui l'empêche de parcourir le petit espace ARN, ou qui le lui feroit parcourir dans un sens opposé, & ce sont ces deux obstacles égaux qui détruisent la force de A. De même le corps B trouve dans la premiere minute un obstacle qui l'empêche de parcourir l'espace QPL; dans la seconde un obstacle qui l'empêche de parcourir l'espace TSQ, & dans la troisiéme un obstacle qui l'empêche de parcourir l'espace BXT, & ce sont ces trois obstacles qui détruisent sa force; or chacun des deux obstacles qui détruisent la force de A est égal à chacun des trois obstacles qui détruisent la force de B; donc les obstacles qui détruisent la force de A, sont à ceux qui détruisent la force de B, comme 2 à 3, ou comme la vitesse de A est à la vitesse de B; & par conséquent la force de A est à celle de B, comme la masse A multipliée par sa vitesse 2 est à la masse B multipliée par sa vitesse 3.

Du Mouvement composé de deux ou plusieurs forces uniformes.

117. Si un corps A (*Fig.* 26.) est poussé par deux forces égales avec des directions opposées CA, DA, ce corps doit rester en repos; car il n'y a pas de raison pour dire que l'une des deux forces doit l'emporter sur l'autre; mais si l'une des deux forces, par exemple la force C est plus grande que la force D, la force C perdra une partie égale à la force D, & elle mouvra le corps avec le reste de sa force, ce qui est évident.

118. Si un corps A (*Fig.* 27.) est poussé par deux forces avec des directions AB, AC, qui ne soient pas opposées, ces deux forces ne perdront rien, & feront chacune leur effet; car ces directions n'étant pas opposées, rien n'empêche le corps de prendre une direction moyenne qui se trouve composée des deux; par exemple, si l'on suppose que la premiere puisse faire parcourir au corps l'espace AC dans le même tems que l'autre force peut lui faire parcourir l'espace AB, il est clair que si l'on fait le paralellogramme ABCH des deux espaces AC, AB, & que le corps se trouve en H dans le même tems que chacune des forces lui auroit fait parcourir son espace, ce corps aura obéï aux deux directions à la fois; car il se trouvera éloigné de la ligne AC de l'espace CH = AB, & de la ligne AB de l'espace BH = AC, & aucun obstacle ne se fera opposé à ce mouvement.

119.

119. PROPOSITION XII. *Si un corps* A (Fig. 28.) *est poussé par deux forces dont l'une lui feroit parcourir selon la direction* AC *un espace* AC *dans le même tems que l'autre lui feroit parcourir l'espace* AB *selon la direction* AB, *je dis que si l'on fait le paralellogramme* ABHC *des deux espaces, le corps* A *parcourera la diagonale* BH *dans le même tems que chacune des forces lui feroit parcourir son espace.*

Je nomme x la force qui feroit parcourir AC, & z celle qui feroit parcourir AB ; je conçois que les espaces AC & AB soient divisés en un même nombre de parties égales, qui par conséquent sont proportionnelles entr'elles, & que le tems de la durée du mouvement selon AC, ou selon AB soit aussi divisée en un même nombre d'instans égaux ; ainsi les parties AM, MN, &c. de l'espace AC representeront les espaces qui devroient être parcourus selon la direction AC pendant ces instans égaux, & les parties AQ, QR, &c. de l'espace AB, representeront les espaces qui devroient être parcourus selon AB, cela posé.

Le corps A ne pouvant parcourir dans le premier instant le petit espace AM que la force x lui feroit parcourir si elle agissoit seule, ni le petit espace AQ que z lui feroit parcourir si l'autre n'agissoit pas conjointement avec elle ; il faut que ce corps se trouve en un point tel qu'il se soit éloigné de AM d'une grandeur égale à l'espace AQ, & de AQ d'une grandeur égale à l'espace AM ; faisant donc le paralellogramme AQTM des espaces AQ, AM, le corps A doit se trouver en T à la fin du premier instant ; or les paralellogrammes AQTM, ABHC étant semblables à cause des côtés AM, AC, proportionnels aux côtés AQ, AB ; si l'on mene les diagonales AT, AH, ces diagonales tomberont l'une sur l'autre, & par conséquent l'extrêmité T de la diagonale AT tombera sur un point T de la diagonale AH, & le corps se trouvera sur cette diagonale à la fin du premier instant.

De même le corps ne pouvant parcourir pendant les deux premiers instans, les espaces AN, AR, que les forces x, z, lui feroient parcourir si elles agissoient seules, il faut qu'il se trouve à l'angle V du paralellogramme ARVN des espaces AN, AR ; or les paralellogrammes ARVN, ABHC, sont semblables, à cause des côtés AN, AC, proportionnels aux côtés AR, AB ; donc leurs diagonales AV, AH, doivent tomber l'une sur l'autre, & partant le corps A qui est en V doit être sur la diagonale AH, & on prouvera que dans tous les autres instans, le corps A doit être

ſur la diagonale AH, & ſe trouver en H dans le même tems qu'il ſe trouveroit en C ou en B, s'il étoit pouſſé par les deux forces ſéparément.

120. Les forces x, z, qui priſes à part feroient parcourir au corps A les eſpaces AC, AB, ſe nomment forces *compoſantes* du mouvement compoſé, & ces forces ſont *équivalentes* à une troiſiéme force, laquelle agiſſant toute ſeule, feroit parcourir au corps A la diagonale AH dans le même tems qu'elles la font parcourir.

121. Comme il n'eſt point de ligne droite AB (*Fig.* 29.) autour de laquelle on ne puiſſe décrire une infinité de paralellogrammes AMBC, ANBD, &c. il n'eſt point auſſi de force ſimple capable de faire parcourir dans un certain tems la diagonale qu'on ne puiſſe regarder comme équivalente à une infinité de forces priſes deux à deux qui feroient parcourir les côtés de leurs paralellogrammes dans le même tems qu'elle feroit parcourir la diagonale. Par exemple la force qui feroit parcourir la diagonale AB, eſt équivalente aux deux forces, qui priſes ſéparément, feroient parcourir dans le même tems les côtés AM, AC du paralellogramme AMBC : elle eſt auſſi équivalente aux deux qui feroient parcourir dans le même tems les côtés AN, AD, du paralellogramme ANBD, &c.

122. Si l'on connoît la force compoſée AB, & les angles que les directions compoſantes font avec elle, on pourra toujours connoître les forces compoſantes ; car il eſt facile de décrire autour de la diagonale AB avec les angles donnés, le paralellogramme AMBC dont les côtés AM, AC, exprimeront les forces compoſantes, c'eſt-à-dire les eſpaces qu'elles feroient parcourir ſelon leurs directions dans le même tems que la compoſée feroit parcourir la diagonale AB. De même ſi l'on connoît les eſpaces AM, AC, que les forces compoſantes feroient parcourir, & la diagonale AB, on pourra connoître les forces compoſantes en faiſant ſur AB avec AC & CB = AM, le triangle ACB, & achevant enſuite le paralellogramme AMBC dont les côtés AM, AC, exprimeront les forces compoſantes : mais ſi l'on ne connoît ni les angles des directions des compoſantes, ni les eſpaces qu'elles feroient parcourir, on ne peut pas connoître préciſément quelles ſont les forces compoſantes de AB, puiſqu'il peut s'en trouver une infinité. (*N.* 121.)

123. La force compoſée de deux forces compoſantes eſt d'au-

tant plus grande, que l'angle que les directions font entr'elles est plus aigu ; car supposons que les deux composantes soient exprimées par les droites AB, AC, (*Fig. 30.*) dont le paralellogramme est ACDB, la force composée sera exprimée par AD ; or si je fais faire aux deux forces AB, AC, un angle plus aigu *c*A*b*, il est visible qu'en achevant le paralellogramme A*cdb*, l'angle A*bd* sera plus grand que l'angle ABD, & partant la base A*d* du triangle A*bd* sera plus grande que la base AD du triangle ABD, mais A*d* étant la diagonale du paralellogramme A*cdb* est la force composée des deux A*c*, A*b*, sous l'angle *c*A*b*; donc cette force est plus grande que la force AD, composée des mêmes forces sous l'angle CAB.

75. PROPOSITION XII. *La force composée* AH (Fig. 28.) *est à l'une des forces composantes* AB *comme le sinus de l'angle* BAC *formé par les directions* AB, CA, *des deux forces composantes, est au sinus de l'angle* CAH *formé par la direction de l'autre force* AC *avec la direction* AH *de la composée, & les deux composantes sont entr'elles réciproquement, comme les sinus des angles formés par leurs directions avec la direction de la composée.*

Puisque la force x & la force z feroient parcourir, l'une l'espace AC, & l'autre l'espace AB dans le même tems que la composée fait parcourir l'espace AH, les vitesses que ces trois forces donneroient au corps A seroient donc entr'elles comme les espaces AC, AB, AH, & par conséquent les forces sont entr'elles comme les quantités de mouvement $A \times AC$, $A \times AB$, & $A \times AH$, c'est-à-dire comme les vitesses AC, AB, AH, ou comme les trois côtés AC, CH, AH, du triangle AHC, à cause de $AB = CH$; or les trois côtés de ce triangle sont entr'eux comme les sinus des angles ausquels ils sont opposés ; donc les forces sont entr'elles comme ces sinus, & par conséquent la force AH est à la force CH, ou AB, comme le sinus de l'angle ACH est au sinus de l'angle CAH, mais le sinus de l'angle ACH est égal au sinus de l'angle CAB complement à deux droits de l'angle ACH ; donc la force AH est à la force CH ou AB, comme le sinus de l'angle CAB, fait par les directions des composantes, est au sinus de l'angle CAH fait par la direction AC de l'autre force avec la direction AH de la composée.

De même le côté AC est au côté CH ou AB, comme le sinus de l'angle AHC est au sinus de l'angle CAH ; donc la force AC est à la force HC comme le sinus de l'angle AHC est au sinus de

l'angle CAH; mais l'angle AHC est égal à son alterne BAH; donc la force AC est à la force CH ou AB, comme le sinus de l'angle BAH est au sinus de l'angle CAH, c'est-à-dire ces deux forces sont entr'elles réciproquement comme les sinus des angles que leurs directions font avec la direction de la composée,

125. PROBLEME. *Un corps étant poussé par plusieurs forces exprimées par les droites* AB, AC, AD, *trouver la force qui doit en résulter, & sa direction* (Fig. 31.)

Je fais le paralellogramme ABEC des forces AB, AC, & la diagonale AE represente la force équivalente aux deux AB, AC; ainsi mettant la force AE au lieu des deux AB, AC, je fais le paralellogramme AEFD des forces AE, AD, & la force AF, étant équivalente aux deux AE, AD, est par conséquent équivalente aux trois forces AB, AC, AD; d'où il suit que le corps A poussé par les trois forces AB, AC, AD, doit parcourir selon la direction AF, l'espace AF dans le même tems que les trois autres forces prises séparement lui feroient parcourir les espaces AB, AC, AD.

Du Mouvement composé d'une force uniforme, & d'une force uniformement accelerée, où l'on traite du mouvement des corps projettés, & du jet des Bombes.

126. Un corps est *projetté perpendiculairement* lorsqu'on le pousse avec une direction perpendiculaire à l'horison, il est *projetté horisontalement*, lorsque sa direction est paralelle à l'horison; enfin il est projetté *obliquement*, lorsqu'on le pousse avec une direction oblique à l'horison, & alors l'angle fait par la direction avec l'horison, se nomme *angle de direction.*

127. *Si un corps est projetté perpendiculairement, son mouvement est toujours perpendiculaire à l'horison.* Car tandis que ce corps suit sa premiere direction de bas en haut, la pesanteur qui ne l'abandonne jamais, fait périr insensiblement sa force & le repousse ensuite de haut en bas vers le centre de la Terre, c'est-à-dire encore perpendiculairemenr à l'horison; donc le corps doit toujours être dans la verticale.

Il suit delà que si on tiroit une bombe avec une direction verticale, elle retomberoit précisément dans le mortier, à moins que l'agitation de l'air à travers lequel elle passeroit ne le détournât de sa direction.

128. PROPOSITION XIII. *Si un corps* A (Fig. 32. 33.) *est projetté selon une direction* AC *horisontale ou inclinée à l'horison, l'espace qu'il décrit est une courbe parabolique* APMN.

Je prens sur la direction AC de la force qui projette le corps, plusieurs parties égales AD, DE, &c. & comme cette force que je nomme x est uniforme, les parties AD, DE, &c. sont les espaces que le corps parcoureroit dans des tems égaux selon la direction AC, & par conséquent les espaces AD, AE, AF, &c. seroient ceux que le corps parcoureroit selon cette direction dans le premier tems, dans les deux premiers, dans les trois premiers, & ainsi de suite; or pendant le mouvement selon la direction AC, la pesanteur n'abandonnant jamais le corps, le fait descendre vers le centre de la Terre selon la direction verticale AL; c'est pourquoi si nous supposons que dans le tems que la force x feroit parcourir au corps l'espace AD, la pesanteur le feroit descendre d'une quantité égale à AG, la même pesanteur pendant les deux premiers tems fera descendre le corps d'une quantité AH quadruple de AG, & pendant les trois premiers elle le fera descendre d'une quantité AL neuf fois plus grande que AG, &c. à cause que les espaces que la pesanteur fait parcourir pendant un premier tems, pendant les deux premiers, pendant les trois premiers, &c. sont entr'eux comme les quarrés de ces tems, ou comme les nombres 1. 4. 9. 16, &c.

Maintenant puisque le corps A poussé par le corps x devroit parcourir dans le premier tems l'espace AD, & que pendant le même tems la pesanteur doit lui faire parcourir AG, si nous faisons le paralellogramme AGPD de ces deux espaces, le corps A doit être au point P à la fin de ce tems; car ce n'est qu'en ce point où il se trouvera éloigné de AG d'un espace GP égal à AD, & de AD d'un espace DP égal à AG; de même puisque le corps A poussé par x, devroit avoir parcouru l'espace AE à la fin des 2 premiers tems, & qu'en conséquence de sa pesanteur il devroit avoir parcouru l'espace AH à la fin des mêmes tems, si nous faisons le paralellogramme AHME, le corps doit se trouver au point M, & par la même raison à la fin des trois premiers tems, il doit se trouver à l'angle N du paralellogramme ALNF, & ainsi de suite; donc la courbe qui passera par les points A, P, M, N, &c. sera la trace, ou le chemin du corps pendant ce mouvement, & il ne s'agit plus que de faire voir que cette courbe est une parabole, ce que je fais ainsi:

Par la conſtruction les droites GP, HM, LN, ſont paralelles & égales chacune à chacune aux eſpaces AD, AE, AF, &c. ou aux tems pendant leſquels ces eſpaces ſeroient parcourus ſelon la direction AC; or les hauteurs AG, AH, AL, &c. ſont entr'elles comme les quarrés de ces tems; donc ces hauteurs ſont comme les quarrés des droites GP, HM, LN, &c. c'eſt-à-dire que dans la courbe APMN, les abſciſſes AG, AH, AL, ſont entr'elles comme les quarrés des ordonnées GP, HM, LN, &c. & par conſéquent cette courbe eſt une parabole.

129. Si la force *x* au lieu de pouſſer le corps ſelon la direction AC, le pouſſoit ſelon la direction A*c* oppoſée à AC, le corps décriroit une autre courbe parabolique A*n*, qui ſeroit la continuation de la précédente AN; car diviſant la direction A*c* aux points *d*, *e*, *f*, en parties égales entr'elles, & aux parties AD, DE, EF, &c. de la direction oppoſée, on prouveroit comme ci-deſſus qu'à la fin du premier tems, le corps devroit ſe trouver à l'angle *p* du paralellogramme AG*pd*, qu'à la fin des deux premiers il devroit ſe trouver à l'angle *m* du paralellogramme AH*me*, & ainſi des autres; c'eſt pourquoi la courbe qui paſſeroit par les points A*pmn*, ſeroit la trace ou le chemin du corps pendant ſon mouvement, & l'on prouveroit comme ci-devant que cette courbe ſeroit une parabole; or par la conſtruction les droites *p*G, *m*H, *n*L ſeroient égales chacune à chacune aux droites GP, HM, LN, &c. dont elles ſont les prolongemens; donc les droites *p*P, *m*M, *n*N, ſeroient les doubles ordonnées du diametres AL, & par conſéquent A*n* ſeroit la continuation de la courbe AN.

130. La ligne AC ou A*c* ſelon la direction de laquelle une force pouſſe un corps, eſt donc tangente de la courbe AN ou A*n* que le corps décrit pendant ſon mouvement; car cette ligne eſt paralelle aux ordonnées GP, HM, &c. au diametre AL qui paſſe par le point A de cette ligne.

131. PROPOSITION XIV. *Soit une parabole* AB (Fig. 34.) *décrite par le mouvement d'un corps projetté ſelon la direction horiſontale* AR *par une force uniforme que je nomme* x. *Si d'un point quelconque* B *pris hors du ſommet de la parabole, on mene une ordonnée* BC *à l'axe* AC, *un diametre* BR *qui coupe la tangente* AR *au ſommet, au point* R, *& une tangente* BT *qui coupe* AR *en* L, *je dis que ſi le même corps eſt projetté de* B *en* T *ſelon la direction* BT *par une autre force uniforme que je nommerai* z, *& qui ſoit à la force* x *comme la tangente* BT *eſt à la tangente* AR, *ce corps décrira pendant*

ſon mouvement la parabole BA *dans le même tems qu'il a employé à la décrire, lorſqu'il étoit pouſſé par la force* x.

Il faut ſe rappeller ici que les deux triangles RLB, TLA, faits par les deux tangentes AR, BT, l'un avec l'axe, & l'autre avec le diametre, ſont parfaitement ſemblables & égaux, ainſi qu'il a été démontré dans le ſecond Livre en parlant des Sections coniques, & que par conſéquent ces deux tangentes ſe coupent mutuellement en deux parties égales au point L, cela poſé

Je diviſe la tangente AR en parties égales, par exemple en 6, & ces parties égales AD, DH, &c. repreſenteront les eſpaces que le corps pouſſé par la force *x* parcoureroit ſelon la direction AR dans des tems égaux, & par conſéquent les droites AD, AH, AL, &c. feront les eſpaces que ce corps parcoureroit ſelon cette même direction dans le premier tems, dans les deux premiers, dans les trois premiers, &c. abaiſſant donc des points de diviſion des lignes verticales DF, HI, LM, &c. juſqu'à ce qu'elles coupent la courbe aux points F, I, M, &c. ces lignes marqueront les quantités dont la peſanteur aura abaiſſé le corps vers le centre de la Terre, pendant le 1er tems, pendant les 2 premiers, pendant les 3 premiers, &c. & partant ces lignes ou abaiſſemens feront entr'eux comme les quarrés 1. 4. 9. 16. 25. 36, de ces tems.

Je diviſe l'autre tangente BT auſſi en ſix parties égales, & comme la force *x* eſt à la force *z* comme AR eſt à BT, c'eſt-à-dire que la force *x* feroit parcourir AR dans le même tems que la force *z* feroit parcourir BT, il eſt clair que les ſix parties égales de la tangente repreſentent les eſpaces égaux que le corps parcoureroit ſelon la direction BT pendant ſix tems égaux chacun à chacun aux ſix tems que le même corps employeroit à parcourir ſelon la direction AR les ſix eſpaces égaux de AR, & qu'ainſi les droites BS, BQ, BL, &c. repreſentent les eſpaces que le corps parcoureroit ſelon la direction AT pendant le premier tems, pendant les deux premiers, pendant les trois premiers, &c.

Or comme la peſanteur à la fin du premier tems ſelon la direction BT ne peut pas avoir abaiſſé le corps d'une quantité plus grande qu'elle ne l'auroit abaiſſé à la fin du premier tems ſelon la direction AR, ni l'avoir abaiſſé à la fin des deux premiers tems ſelon la direction BT, plus qu'elle ne l'auroit abaiſſé à la fin des deux premiers tems ſelon la direction AR, & ainſi de ſuite, à cauſe que la peſanteur d'un corps étant toujours la même, agit toujours de la même façon; il s'enſuit que ſi par les points de

division S, Q, L, Z, Y, T, de la tangente BT, on mene des verticales SV, QO, &c. égale chacune à chacune aux verticales DF, HI, &c. menées par les points de division de la tangente RA, ces verticales SV, QO, &c. marqueront les quantités dont la pesanteur aura abaissé le corps poussé selon la direction BT à la fin du premier tems, à la fin des deux premiers, à la fin des trois premiers, &c. & il faut observer que les verticales SV, QO, &c. menées des points de la tangente BT sont dans la direction des verticales menées des points de la tangente TR; car dans le triangle rectangle RLB, le côté RL étant divisé aux points P, N en même raison que le côté BL aux points S, Q, les droites PS, NQ, menées par ces points sont paralelles à la verticale RB, & par conséquent elles sont verticales aussi; d'où il suit que les verticales menées des points P, N, &c. passent par les points S, Q, &c. ou passent les verticales menées par les points S, Q, &c. & on dira la même chose à l'égard de l'autre triangle TLA.

Il ne reste donc plus qu'à faire voir que les extrêmités F, I, M, O, &c. des verticales DF, HI, &c. menées des points de la tangente AR sont aussi les extrêmités des verticales YF, ZI, &c. menées des points des points de la tangente BT, & que par conséquent le corps poussé par la force z, passe par les mêmes points par lesquels il passeroit s'il étoit poussé par x, & cela dans les mêmes tems, ce que je démontre ainsi:

Dans le triangle LTA, la ligne YD étant paralelle à la base TA, nous avons TA. YD :: LT :: LY :: 3. 2; or à cause que TA est la quantité dont la pesanteur doit avoir abaissé le corps poussé selon la direction BT à la fin du sixiéme tems, nous avons TA $= 36$; donc 36. YD :: 3. 2, & par conséquent YD $= 24$; & ajoutant à YD la droite DF qui est la quantité dont la pesanteur à la fin du premier tems doit abaisser le corps poussé selon la direction DA, nous aurons YD + DF = YF $= 24 + 1 = 25$; or 25 est la quantité dont la pesanteur à la fin des cinq premiers tems doit avoir abaissé le corps poussé selon la direction BT, donc YF est égal à cette quantité, & par conséquent le corps poussé selon la direction BT doit se trouver à la fin du cinquiéme tems au point F où il se trouveroit à la fin du premier tems, s'il étoit poussé selon la direction AR.

De même dans le triangle LTA, nous avons TA. ZH :: LT. LZ :: 3. 1; or TA $= 36$, donc 36. ZH :: 3. 1, & partant ZH $= 12$, & ajoutant à ZH la droite HI égale à 4, à cause qu'elle est

est la quantité dont la pesanteur auroit abbaissé le corps à la fin du second tems selon la direction AR, nous aurons $ZH+HI=ZI=16$; or 16 est la quantité dont la pesanteur doit avoir abbaissé le corps à la fin des quatre premiers tems selon la direction BT; donc le corps poussé selon la direction BT doit se trouver à la fin du cinquiéme tems au point I, où il se trouveroit à la fin du second tems, s'il étoit poussé selon la direction AR, ainsi des autres.

132. *Si après le sixiéme tems, le corps poussé selon la direction* BT *continuoit à se mouvoir, il décriroit de l'autre côté de* A *une autre demi parabole* Ab, *qui seroit la continuation de la demi parabole* AB, *& la ligne* AC *seroit l'axe de la parabole entiere* ABb.

Je prolonge BT en t, faisant $Tt=TB$; je divise Tt en six parties égales entr'elles, & aux six parties de TB; ainsi le corps poussé selon la direction BT par la force z, se trouveroit en y à la fin du septiéme tems, en z à la fin du huitiéme, & ainsi de suite; mais comme la pesanteur agit toujours sur lui, il doit se trouver à la fin de ces tems en des points f, i, &c. tels que les verticales yf, zi, &c. soient entr'elles comme les quarrés de ces tems, c'est-à-dire comme les quarrés 49, 64, &c.

Je prolonge la direction AR du côté opposé en r, & il est aisé de voir que Ar se trouve divisée en six parties égales chacune à chacune aux six divisions de AR par les verticales yf, zi, &c. cela posé.

Dans les triangles Lyd, LTA, nous avons TA. yd :: LT. Ly :: 3.4; or $TA=36$; donc 36. yd :: 3. 4, & partant $yd=48$; or $yf=yd+df=49$; donc $df=1$. Par un semblable raisonnement on trouvera $hi=4$, $lm=9$, &c. & partant $lm=LM$, $no=NO$, &c. Menant donc les lignes Ff, Ii, Mm, &c. ces lignes seront paralelles entr'elles & à la direction RA; d'où il suit que la ligne AC perpendiculaire sur RA leur sera perpendiculaire, & les coupera toutes en deux également à cause du point A également éloigné de D & de d, de H & de h, &c. & que par conséquent AC sera l'axe de la parabole entiere BAb.

133. *Le corps poussé par la force* z *selon la direction* BT, *décrit les deux demi-paraboles* BA, Ab, *dans deux tems égaux*; car BT étant égal à Tt par la construction, la force uniforme z feroit parcourir au corps les espaces BT, Tt, dans deux tems égaux; mais à la fin du premier tems le corps, au lieu d'être en T se trouve en A, & a décrit la demi-parabole BA, & à la fin du se-

cond tems, au lieu d'être en t, il se trouve en b, & il a décrit pendant ce second tems la demi-parabole Ab ; donc ces deux demi-paraboles sont décrites dans des tems égaux.

134. *Definition.* Un corps étant projetté selon une direction BT inclinée à l'horison ; si du point B de projection on mene une ligne horisontale Bb qui coupe en un autre point b la parabole BAb que le corps décrit dans son mouvement, cette ligne se nomme *Amplitude* de la parabole, & l'axe AC se nomme *la plus grande hauteur du jet ;* ainsi l'axe AC coupe l'amplitude en deux parties égales.

135. Proposition XV. *Une parabole* AB (Fig. 35.) *étant donnée trouver son parametre.*

J'ai donné plusieurs façons de résoudre ce problême, en parlant des Sections coniques dans le second Livre, mais en voici une autre qui nous fera d'une grande utilité pour le jet des bombes.

D'un point quelconque B pris sur la parabole hors du sommet A, je mene l'ordonnée BC à l'axe AC, un diamétre BD qui coupe en D la tangente AD menée du sommet A, & une tangente BT qui coupe la même tangente AD en R ; du point R je mene la droite RC à l'extrêmité C de l'abscisse AC, & j'éleve en R la droite RE perpendiculaire sur RC, & qui coupe en E l'axe prolongé ; cela fait, je dis que la droite AE comprise entre le sommet A de la parabole, & la droite RE est le quart du parametre demandé, ce que je démontre ainsi :

A cause que les deux tangentes AD, BT, se coupent entre l'axe & le diametre BD, nous avons DR = RA ; or DA = BC à cause des paralelles AC, DB, & DA, BC ; donc RA $= \frac{1}{2}$BC, & par conséquent $\overline{RA}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2$, mais en nommant p le parametre demandé, nous avons par la proprieté de la parabole $\overline{BC}^2 = CA \times p$; donc $\overline{RA}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2 = CA \times \frac{1}{4}p$; or le triangle ERC étant rectangle par la construction, est divisé par la perpendiculaire RA menée du sommet R sur son hypothenuse en deux triangles semblables ERA, ARC, & partant EA. AR :: AR. AC ; donc $\overline{RA}^2 = AC \times EA$; mais nous venons de trouver $\overline{RA}^2 = AC \times \frac{1}{4}p$; donc $AC \times \frac{1}{4}p = AC \times EA$, & par conséquent $EA = \frac{1}{4}P$.

136. Il suit delà 1°. que si après avoir mené d'un point quelconque B l'ordonnée BC à l'axe AC, un diametre BD qui coupe en D la droite AD tangente au sommet A, & la tangente BT

qui coupe la même tangente AD en R, l'on prend sur l'axe prolongé la partie AE égale au quart du parametre de l'axe, & que des points E, C, on mene au point R les droites ER, CR, l'angle ERC sera droit; car à cause de $RA = \frac{1}{2} DA = \frac{1}{2} BC$, on aura toujours $\overline{AR}^2 = \frac{1}{4} \overline{BC}^2 = \frac{1}{4} p \times CA$, mais par la supposition $EA = \frac{1}{4} p$; donc $\overline{AR}^2 = EA \times CA$; donc dans le triangle ERC la perpendiculaire RA sera moyenne proportionnelle entre les segmens EA, CA, de la base, & par conséquent ce triangle sera rectangle en R. 2°. Que les lignes RC, BR, seront égales; car les triangles rectangles RDB, RAC sont parfaitement égaux & semblables, à cause de DR = RA, & de DB = AC, ce qui donne BR = RC. 3°. Que si on prolonge le diametre BD en H jusqu'à ce qu'on ait BH = CE, & que du point H, on mene la droite HR, le triangle HBR sera égal & semblable au triangle ERC; car dans les triangles semblables & égaux DBR, ACR, l'angle DBR est égal à l'angle ACR; or dans les triangles HBR, EAC, les côtés HB, BR, sont égaux chacun à chacun aux côtés EC, CR; donc à cause de l'angle compris HBR, égal à l'angle compris ECR, le troisiéme côté HR est égal au troisiéme côté RE, & partant le triangle HRB est égal & semblable au triangle rectangle ERC. 4°. Que si sur BH pris pour diamétre on décrit un demi-cercle HRC, ce demi-cercle coupera la tangente DA en deux également, ce qui est évident, puisque le triangle HRB est rectangle. 5°. Que la droite DR comprise dans le demi-cercle HRB est le quart de l'amplitude B*b* de la parabole BA*b* qui seroit décrite par un corps projetté selon la direction BT; car DR est égal à $\frac{1}{2}$BC, & partant égal à $\frac{1}{4}$B*b*.

137. PROPOSITION XVI. *Si un corps projetté selon une direction horisontale* AD (Fig. 35.) *décrit une parabole* AB, *la vitesse avec laquelle il est poussé est égale à la vitesse qu'il auroit acquise en tombant d'une hauteur* EA *égale au quart de son parametre.*

Je cherche par la Proposition précédente la droite EA égale au quart du parametre, en menant d'un point B pris sur la courbe une ordonnée BC à l'axe, un diamétre BD, une tangente BT, &c. cela posé:

La vitesse que le corps auroit acquise en tombant de la hauteur EA, est à celle qu'il a acquise en s'abbaissant de la hauteur DB ou AC, comme la racine quarrée de EA est à la racine quarrée de AC; car dans le mouvement uniformément acceleré,

les espaces parcourus étant comme les quarrés des vitesses acquises à la fin de ces espaces, ces vitesses sont entr'elles comme les racines quarrées des espaces ; or à cause des triangles rectangles semblables EAR, RAC, nous avons EA. AR :: AR. AC; donc $\overline{EA}^2$. $\overline{AR}^2$ :: EA. AC, & par conséquent EA. AR :: $\sqrt{EA}$. $\sqrt{AC}$; donc la vitesse que le corps auroit acquise en tombant de la hauteur EA est à celle qu'il a acquise en s'abbaissant de la hauteur AC comme EA est à AR, & les tems employés à parcourir ces hauteurs sont aussi comme EA est à AR, c'est-à-dire comme les vitesses acquises ; or le corps avec une vitesse uniforme égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur EA, parcoureroit dans un tems égal à EA un espace double de EA, (*N.* 104.) donc avec la même vitesse uniforme il doit parcourir un espace AD double de AR dans un tems égal à AR, c'est-à-dire dans un tems égal à celui que la pesanteur a employé à l'abbaisser de la hauteur AC ou DB ; car dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus par un corps sont entr'eux comme les tems: mais par la supposition la force horisontale qui a projetté le corps lui auroit fait parcourir AD dans un tems égal à celui pendant lequel la pesanteur l'a abbaissé de la hauteur AC; donc la vitesse que cette force horisontale donne au corps est égale à celle qu'il auroit acquise s'il étoit tombé de la hauteur EA égale au quart de son parametre.

138. PROPOSITION XVII. *Si un corps* A *projetté selon une direction* BT *oblique à l'horison, décrit une parabole* BAb (Fig. 35.) *la vitesse avec laquelle il est poussé, est égale à celle qu'il auroit acquise s'il étoit tombé d'une hauteur égale au quart du parametre du diametre* BD, *mené par le point* B *de projection.*

Du point B je mene le diamétre BD, & l'ordonnée BC à l'axe AC ; du sommet, je mene la tangente AD qui coupe la direction BT au point R ; de ce point R je mene la droite RC à l'extrêmité C de l'abscisse AC, & élevant en R la droite RE perpendiculaire sur RC, j'ai EA égal au quart du parametre de l'axe, (*N.* 135.) & EC égal au quart du parametre du diametre BD; car le parametre du diamétre BD est égal au parametre de l'axe plus quatre fois l'abscisse AC, ainsi qu'il a été dit dans les Sections coniques Livre second, & par conséquent son quart est égal à AC + AE = EC; ainsi il s'agit de faire voir que la force qui pousse le corps selon la direction BT donne à ce corps une vitesse

égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur EC, ce que je fais ainsi.

Si le corps poussé par une force x avec la direction horizontale AR décrivoit la demi-parabole AB, dans un tems égal à celui qu'il employe à la décrire, lorsqu'il est poussé par la force z avec la direction oblique BT, la force x feroit à la force z, comme la tangente AD est à la tangente BT, car nous avons fait voir (*N.* 131.) que deux forces qui feroient entr'elles comme ces tangentes feroient parcourir la même demi-parabole AB dans des tems égaux; donc nous aurions $x. z$ :: AD. BT :: AR. BR :: AR. CR (*N.* 136.); mais les triangles semblables ARC, ERC donnent AR. CR :: ER. EC, donc $x. z$ :: ER EC; or, à cause des triangles semblables EAR, ECR, nous avons EA. ER :: ER. EC, ce qui donne $\overline{ER}^2. \overline{EC}^2$ :: EA. EC, & ER. EC :: $\sqrt{EA}. \sqrt{EC}$, ainsi $x. z$ :: $\sqrt{EA}. \sqrt{EC}$, c'est-à-dire comme la vitesse que le corps acquerroit en tombant de la hauteur EA est à la vitesse qu'il acquerroit en tombant de la hauteur EC. Mais les forces uniformes x, z étant entr'elles comme les quantités de mouvement, ou comme les produits des masses par les vitesses, sont par conséquent entr'elles comme leurs vitesses, à cause que la masse est ici la même. Donc la vitesse que x donneroit au corps est à celle que z lui donne, comme $\sqrt{EA}$ est à $\sqrt{EC}$; or, $\sqrt{EA}$ est la vitesse que x donneroit au corps (*N.* 137.), donc $\sqrt{EC}$ est la vitesse que z lui donne.

139. PROBLEME. *Connoissant l'angle d'inclinaison* TBC (Fig. 35.) *sous lequel un corps est projetté, & l'amplitude* Bb *de la parabole qu'il décrit, connoître la plus grande hauteur du jet, & décrire la parabole.*

Je coupe l'amplitude B*b* en deux parties égales en C, j'éleve au point C la droite CT perpendiculaire sur B*b*, & je la prolonge jusqu'à ce qu'elle coupe la direction BT en T. Je coupe la droite TC en deux également en A, & la droite AC moitié de TC est la plus grande hauteur du jet, c'est-à-dire l'axe de la parabole compris entre le sommet & l'amplitude B*b*. Cherchant donc une troisiéme proportionnelle à l'axe AC, & à l'ordonnée ou demi-amplitude BC, cette troisiéme proportionnelle sera le paramétre, & par conséquent il sera aisé de décrire la parabole demandée. Tout cela est évident, car 1°. l'axe où la plus grande hauteur du jet doit couper perpendiculairement & en deux égale-

ment l'amplitude B*b* (*N.* 134.), ainsi que nous avons fait. 2°. La direction BT doit être tangente en B de la parabole que le corps décrit (*N.* 132.), ce qui arrive en effet ici, puisque la droite TC ayant été coupée en deux également en A, la droite BT est nécessairement tangente en B; donc la parabole BA*b* est la parabole que décrit le corps projetté, selon la direction BT.

140. PROBLEME. *Connoissant la parabole* AHC (Fig. 36.) *que décrit un corps projetté sous un angle d'inclinaison* DAC, *par une force quelconque, connoître la parabole qu'il décriroit s'il étoit projetté par la même force sous un autre angle d'inclinaison* EAC.

Je cherche par le Problême précédent la plus grande hauteur du jet ou l'axe SH; du sommet H, je mene la tangente HL qui coupe le diamétre AL en L, & la direction ou tangente AD au point T; je cherche le quart du paramétre de l'axe (*N.* 135.), & prolongeant AL, je fais LB égal au quart de ce paramétre. Ainsi AB étant égal à l'abscisse SH, plus le quart du paramétre de l'axe est par conséquent égal au quart du paramétre du diamétre AL. C'est pourquoi décrivant sur AB pris pour diamétre un demi-cercle BMA, ce demi-cercle passe par le point T où les tangentes AL, HT se coupent (*N.* 136.).

Du point M où la direction EA coupe le cercle, je mene NR paralelle à LH ou AC, je fais la partie extérieure MR égale à la partie intérieure NM; du point R, j'abaisse RP perpendiculaire sur AC, & prenant RP pour l'axe d'une parabole, & AP pour l'une de ses ordonnées, je décris la parabole ARX qui sera la parabole que doit décrire le corps lorsqu'il sera projetté avec la direction EA par la même force qui l'a projetté avec la direction DA, ce que je démontre ainsi.

Du point M, je mene la droite MP, & élevant en M la droite MZ perpendiculaire sur MP, la droite ZR sera le quart du paramétre de l'axe RP, & ZP le quart du paramétre du diamétre AB qui passe par le point A. Or, à cause de NM=MR par la construction, & des paralelles égales NA, RP, les triangles rectangles NMA, MRP sont parfaitement égaux; donc si je mene la droite BM, laquelle sera perpendiculaire sur AM, à cause que l'angle AMN à la circonférence embrasse le diamétre, les triangles rectangles AMB, PMZ seront semblables & égaux, à cause de AM=MP, & de l'angle aigu MAN égal à l'angle aigu MPR, donc BA=ZP. Ainsi si le corps poussé avec la direction AM décrivoit la parabole ARX, la force qui le pousseroit lui donne-

roit une viteſſe égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la hauteur ZP ou BA (*N.* 138.); or, quand le corps pouſſé, ſelon la direction AD, a décrit la parabole AHC, la force qui le pouſſoit lui a donné une viteſſe égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la même hauteur BA qui eſt auſſi le quart du paramétre AL à l'égard de cette parabole, donc la viteſſe que le corps auroit reçû ſous la direction AM s'il avoit parcouru la parabole ARX eſt égale à celle qu'il a reçu ſous la direction AD; or, les forces qui donnent ces viteſſes étant entr'elles comme leurs quantités de mouvement, ou comme les produits des maſſes par les viteſſes, ſont par conſéquent entr'elles comme les viteſſes, à cauſe que la maſſe eſt ici la même, donc le corps qui décrit la parabole AHC eſt pouſſé avec la même force qu'il ſeroit pouſſé s'il décrivoit la parabole ARX.

141. Comme toutes les directions obliques ſur AX avec leſquelles la même force peut projetter le corps coupent néceſſairement le demi-cercle BMA; il s'enſuit que par le moyen de ce demi-cercle on peut trouver toutes les paraboles que le corps pouſſé par cette force peut décrire ſous différentes inclinaiſons.

142. *Dans toutes les paraboles qu'un corps pouſſé par une même force, peut décrire les paramétres des axes ſont tous inégaux.* Car le quart du paramétre de l'axe de la parabole AHC étant LB, le quart du paramétre de l'axe de la parabole ARX, eſt NB, & par conſéquent ces deux quarts étant inégaux, les paramétres le ſont auſſi.

143. *Dans toutes les paraboles qu'un corps pouſſé par une même force peut décrire ſous differentes inclinaiſons, les amplitudes des paraboles, ſont entr'elles comme le ſinus des angles doubles, des angles d'inclinaiſon.* La droite LT eſt le quart de l'amplitude AC de la parabole AHC (*N.* 136.), & par la même raiſon la droite NM eſt le quart de l'amplitude de la parabole ARX; & comme les amplitudes ſont dans la même raiſon que leurs quarts, il ne s'agit que de faire voir que les droites LT, NM ſont les ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon LAC, EAC, ce que je fais ainſi:

Du centre O du demi-cercle BMA, je mene les rayons OT, OM, aux points T, M où les directions LA, MA coupent le demi-cercle. L'angle au centre TOA eſt double de l'angle d'inclinaiſon TAC qui eſt l'angle du ſegment TA; de même l'angle au centre MOA eſt double de l'angle d'inclinaiſon MAC qui eſt

l'angle du segment MA ; or, LT est le sinus de l'angle TOA, & MN est le sinus de l'angle MOA ; donc les amplitudes CA, XA qui sont entr'elles comme leurs quarts LT, NM, sont aussi entr'elles comme les sinus des angles doubles des angles d'inclinaison LAC, EAC.

144. *Dans toutes les paraboles qu'un corps poussé par une même force, peut décrire sous differentes inclinaisons les plus grandes hauteurs des jets, sont entr'elles comme les sinus verses des angles doubles des angles d'inclinaison.*

Dans la parabole AHC la plus grande hauteur HS est égale à AL, & dans la parabole ARX, la plus grande hauteur RP est égale à AN ; or, AL est le sinus verse de l'angle TOA double de l'angle d'inclinaison TAC, & AN est le sinus verse de l'angle MOA double de l'angle d'inclinaison MAC ; donc les plus grandes hauteurs HS, RP de ces deux paraboles sont entr'elles comme les sinus verses des angles doubles des angles d'inclinaison.

On peut dire aussi que *les plus grandes hauteurs des jets* HS, RP, &c. *sont entr'elles comme les quarrés des sinus des angles d'inclinaison.* Car à cause des triangles rectangles semblables NAM, BAM, nous avons NA. AM :: AM. AB ; donc $\overline{AM}^2 = NA \times AB$. De même si du point T nous menions une droite au point B, nous aurions deux autres triangles rectangles semblables LAT, BAT qui donneroient LA. AT :: AT. AB, & partant $\overline{AT}^2 = LA \times AB$; donc $\overline{AT}^2$. $\overline{AM}^2$ :: LA×AB. NA×AB ; & divisant les termes de la derniere raison, nous aurions $\overline{AT}^2$. $\overline{AM}^2$ :: AL. AN ; or, la moitié de la corde AT est le sinus de la moitié de l'angle TOA, c'est-à-dire le sinus de l'angle d'inclinaison TAC, & la moitié de la corde AM est le sinus de la moitié de l'angle MOA, c'est-à-dire le sinus de l'angle d'inclinaison MAC ; or, ces sinus ou demi-cordes étant entr'eux comme les cordes, leurs quarrés sont aussi comme les quarrés des cordes ; donc puisque nous avons AL. AN :: $\overline{AT}^2$. $\overline{AM}^2$, nous aurons aussi AL est à AN comme le quarré du sinus de l'angle d'inclinaison TAC est au quarré du sinus de l'angle d'inclinaison MAC, mais AL=HS, & AN=RP ; donc les plus grandes hauteurs HS, RP, sont entr'elles comme les quarrés des sinus des angles d'inclinaison.

145. *Dans toutes les paraboles qu'un corps poussé par une même force, peut*

peut décrire sous differentes directions les espaces que ce corps parcoureroit sur ses directions, si la pesanteur ne l'abaissoit pas, sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison.

De l'extrémité C de l'amplitude AC, j'éleve sur AC la perpendiculaire CV, jusqu'à ce qu'elle coupe la direction AV en V, & la droite AV marque l'espace que le corps auroit parcouru sur sa direction AV dans un tems égal à celui qu'il a employé à parcourir la parabole AHC, par les principes ci-dessus (*N.* 128. 131.); par la même raison élevant à l'extrémité X de l'amplitude AX la perpendiculaire XY qui coupe la direction AY, la droite AY marque l'espace que le corps parcoureroit sur cette direction dans un tems égal à celui qu'il employeroit à parcourir la parabole ARX. Des points T, M où les directions AV, AY coupent le demi-cercle BMTA, j'abbaisse sur l'horizontale AX les perpendiculaires TG, MK, & à cause des triangles semblables ATG, AVC, j'ai AG. AC :: AT. AV; mais AG est le quart de AC, donc AT$=\frac{1}{4}$AV, de même à cause des triangles semblables AMK, AYX, j'ai AK. AX :: AM. AY; mais AK$=\frac{1}{4}$AX, donc AM$=\frac{1}{4}$AY; ainsi les cordes AT, AM du demi-cercle, sont les quarts des directions totales AV, AY, & par conséquent ces directions sont entr'elles comme les cordes AT, AM, ou comme les moitiés de ces cordes, mais les moitiés des cordes sont les sinus des angles d'inclinaison, comme on a vû (*N.* 144.); donc les espaces AV, AY que le corps parcoureroit sur ses directions, si la pesanteur ne l'abaissoit pas, sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison.

146. *Dans toutes les paraboles qu'un corps projetté par une même force peut décrire, sous differentes directions, les tems pendant lesquels ces paraboles sont décrites, sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison.*

Puisque le corps auroit parcouru la droite AV sur la direction AV dans un tems égal à celui qu'il a employé à décrire la parabole AHC, la verticale VC est la hauteur dont la pesanteur a abaissé ce corps dans le même tems; & par la même raison la verticale YX est la hauteur dont la pesanteur abaisseroit le corps lorsqu'il décriroit la parabole ARX. Or, à cause des triangles semblables ATG, AVC, nous avons AG. AC :: TG. VC; donc à cause de AG$=\frac{1}{4}$AC, nous avons TG$=\frac{1}{4}$VC, de même dans les triangles semblables AMK, AYX, nous avons AK. AX :: MK. YX; donc à cause de AK$=\frac{1}{4}$AX, nous avons MK$=\frac{1}{4}$YX, & par

conféquent VC. YX :: TG. MK; mais TG=AL, & MK=AN, donc VC. YX :: AL. AN, c'eſt-à-dire les verticales VC, YX ſont entr'elles comme les ſinus verſes AL, AN des angles doubles des angles d'inclinaiſon, mais ces ſinus ſont entr'eux comme les quarrés des ſinus des angles d'inclinaiſon (*N.* 144.); donc les verticales VC, YX, ſont entr'elles comme les quarrés des ſinus des angles d'inclinaiſon, ou comme $\frac{1}{4}\overline{AT}^2$, $\frac{1}{4}\overline{AM}^2$ (*N.* 145.); or, le tems que la peſanteur employe à abaiſſer le corps d'une quantité égale à VC eſt au tems qu'elle employeroit à l'abaiſſer d'une quantité égale à YX comme la racine quarrée de VC eſt à la racine quarrée de YX; donc ces tems ſont entr'eux comme les racines quarrées de $\frac{1}{4}\overline{AT}^2$, $\frac{1}{4}\overline{AM}^2$, c'eſt-à-dire comme $\frac{1}{2}$AT, $\frac{1}{2}$AM, ou comme les ſinus des angles d'inclinaiſon (*N.* 145.); il ſuit de là que les tems employés à parcourir les paraboles AHC, ARX, &c. ſont entr'eux comme les moitiés des cordes AT, AM, &c. ou comme les huitiémes des directions totales, & par conſéquent comme ces directions.

147. *De toutes les paraboles que peut décrire un corps pouſſé par une même force avec differentes directions, celle qui a une plus grande amplitude, eſt celle qui eſt décrite ſous un angle de 45 degrés, & celles qui ſont décrites ſous des angles également éloignés de 45 degrés, ſont égales* (Fig. 37.).

Quand le corps eſt projetté ſous un angle de 45 degrés, la perpendiculaire MO abaiſſée ſur le diamétre BA du point M où la direction AM coupe le cercle eſt le quart de l'amplitude de la parabole, & en même tems le ſinus de l'angle de 90 degrés double de l'angle d'inclinaiſon MAC; or, le ſinus de 90 degrés eſt le plus grand de tous les ſinus, donc puiſque les amplitudes ſont comme les ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon, l'amplitude ſous 45 degrés eſt plus grande que l'amplitude ſous un autre angle quelconque, puiſque le ſinus du double de cet angle ſera toujours moindre que le rayon ou le ſinus de 90 degrés.

Maintenant prenons les angles TAC, VAC également éloignés de 45 degrés; par exemple, l'un de 15 degrés, & l'autre de 75, le double du premier ſera de 30 degrés, & le double du ſecond de 150, & par conſéquent celui-ci étant le complement à deux angles droits de l'angle de 30 degrés, ſon ſinus VH ſera égal au ſinus TL, de l'angle de 30 degrés; or, les ſinus VH, LT

ſont les quarts des amplitudes ſous les angles VAC, TAC; donc les amplitudes ſous les angles également éloignés de 45 degrés, ſont égales.

148. *La force qui projette le corps demeurant la même, l'amplitude ſous 45 degrés eſt double de l'amplitude ſous 15 degrés.* L'angle double de 45 degrés étant de 90, ſon ſinus eſt égal au rayon. De même l'angle double de 15 degrés eſt de 30 degrés, & le ſinus de 30 degrés eſt la moitié de la corde qui ſoutient l'arc de 60 degrés double de 30 degrés, & par conſéquent le ſinus de 30 degrés eſt la moitié du rayon. Or l'amplitude ſous 45 eſt à l'amplitude ſous 15, comme le ſinus de 90 degrés eſt au ſinus de 30; donc ces amplitudes ſont entr'elles comme le rayon eſt à la moitié du rayon, ou comme 2 eſt à 1.

149. *La plus grande amplitude* AX *d'une force*, (Fig. 37.) *eſt double du quart du paramètre du diamétre qui paſſe par le point* A *de projection.*

La plus grande amplitude étant ſous l'angle de 45 degrés MAX, ſi je prolonge la direction AM juſqu'à ce qu'elle coupe l'axe prolongé en P, le triangle AZP ſera rectangle & iſoſcele, & partant $AZ = ZP = 2ZN$; or le rayon AO eſt alors égal à ZN; donc $AB = 2AO = 2ZN$, & par conſéquent $AB = ZP = AZ$, mais AZ eſt la moitié de l'amplitude; donc AB ou le quart du paramétre du diamétre qui paſſe par A eſt égal à la moitié de l'amplitude; donc l'amplitude entiere AX eſt égale à deux quarts ou à la moitié de ce paramétre, & par conſéquent elle eſt double du quart de ce paramétre.

150. PROBLEME. *Compoſer une table qui contienne toutes les amplitudes des differentes paraboles que peut décrire une Bombe projettée avec une même force de poudre ou avec une même charge d'une même poudre.*

Il faut faire une épreuve, c'eſt-à-dire tirer une Bombe avec la charge donnée ſous un angle pris à volonté; meſurer enſuite exactement l'amplitude ou la diſtance du Mortier à l'endroit où la Bombe eſt tombée; après quoi ſi on veut trouver l'amplitude ſans un autre angle, on cherchera dans la table des ſinus, le ſinus double de celui ſous lequel on a fait l'épreuve, & le ſinus double de celui ſous lequel on cherche l'amplitude, puis l'on dira par regle de trois: comme le ſinus double de l'angle ſous lequel on a tiré eſt au ſinus double de celui ſous lequel on cherche l'amplitude; ainſi l'amplitude de la parabole décrite ſous le pre-

mier angle est à un quatriéme terme qui sera l'amplitude de la parabole qui seroit décrite dans le second angle; & faisant la même chose à l'égard de tous les autres angles sous lesquels on peut tirer la même Bombe avec la même charge, on aura toutes les amplitudes demandées. Cela fait, on écrira dans une colonne tous les degrés sous lequel on peut tirer, c'est-à-dire depuis 1 jusqu'à 90, & à côté de ces degrés les amplitudes correspondantes, & la table sera faite. Ce qui est évident, puisque les amplitudes sont entr'elles comme le sinus des angles doubles des angles d'inclinaison.

151. Cette table étant ainsi composée, on peut par son moyen & sans le secours des sinus trouver les amplitudes des différentes paraboles que pourroit décrire la même Bombe avec une autre charge. Par exemple, supposons que la Bombe poussée avec la premiere charge que je nomme a ait eu sous un angle $=b$ une amplitude $=m$, & sous un angle $=c$ une amplitude $=n$; & qu'on demande quelles amplitudes elle auroit sous les mêmes angles, si elle étoit tirée avec une autre charge $=f$, on tirera la Bombe avec la charge f sous un angle $=b$, & mesurant exactement sa portée ou amplitude, l'on dira par regle de trois : l'amplitude m de la force a sous l'angle b est à l'amplitude n de la même force sous l'angle c, comme l'amplitude trouvée de la force f sous l'angle b est à un quatriéme terme qui sera l'amplitude que la même force f donneroit sous l'angle c; ce qui est encore évident, puisque les angles des amplitudes de la force a & celles des amplitudes de la force f sont les mêmes, & que les amplitudes de l'une & de l'autre force sont comme les sinus des angles doubles des angles b & c.

152. PROBLEME. *Composer une table pour trouver tout d'un coup quels sont les angles qui conviennent à toutes les amplitudes possibles d'une même force.*

Il faut tirer une Bombe avec la charge donnée sous un angle de 45 degrés ou de 15; si on tire sous 45, la distance du Mortier à l'endroit où la Bombe tombera sera la plus grande amplitude, (*N.* 147.) & si on tire sous 15 degrés, on n'aura qu'à doubler cette distance pour avoir la plus grande amplitude (*N.* 148.) après quoi si on veut tirer pour avoir une amplitude moindre que la plus grande, on dira par regle de trois; la plus grande amplitude est à celle qu'on demande comme le sinus de l'angle double de 45 degrés, c'est-à-dire le rayon à un quatriéme terme qui

fera le finus de l'angle double de celui fous lequel il faudroit tirer pour avoir l'amplitude demandée. Cherchant donc dans les Tables des Sinus à quel angle appartient ce finus, la moitié de cet angle fera celui qui donneroit l'amplitude demandée, & ainfi des autres. Ayant donc trouvé les degrés qui conviennent à toutes les amplitudes qui font au-deffous de la plus grande, on écrira dans une colonne toutes les amplitudes, à commencer depuis la moindre jufqu'à la plus grande, & vis-à-vis de chacune on écrira dans une autre colonne les degrés qu'on aura trouvé leur convenir.

153. Si l'on faifoit le coup d'épreuve fous un angle différent de celui de 45 degrés ou de celui de 15, il faudroit pour avoir la plus grande amplitude faire un calcul tel que nous l'avons dit ci-deffus, (*N.* 150.) au lieu qu'en tirant fous 45 ou fous 15, la plus grande amplitude fe trouve plus aifément, & c'eft pourquoi j'ai dit qu'il falloit faire le coup d'épreuve fous l'un ou l'autre de ces deux angles.

154. M. Blondel après avoir rapporté dans le premier Livre de fon *Art de jetter les Bombes*, ce qu'on avoit dit avant lui fur ce fujet, nous fait obferver que la plûpart des Auteurs qui ont écrit fur l'Artillerie fe font trompés à l'égard des portées d'une même force convenables aux différens angles d'inclinaifon, pour n'avoir pas bien connu les regles du mouvement de projection. Deftitués de ce fecours, ils ont crû pouvoir s'en dédommager en fe jettant du côté des épreuves; mais ces épreuves n'étant pas guidées par cette fine théorie qui nous apprend à en écarter les circonftances & les accidens étrangers, loin de leur être utiles les ont jettés dans l'erreur, & leur ont fait imaginer des fyftêmes bien éloignés de la réalité. Ce qu'il y a de furprenant, c'eft que M. de Saint-Remi qui avoit lû la judicieufe Critique que M. Blondel a faite des tables des Bombardiers, nous en ait cependant rapporté quelques-unes dans fes Memoires d'Artillerie telles qu'il les a trouvées dans l'Ouvrage de cet Auteur, & qu'il ait prétendu les juftifier par la frivole raifon que l'expérience, furtout en fait de poudre, doit l'emporter fur les plus fçavantes obfervations. Heureufement les expériences même ont détrompé les Bombardiers de nos jours, & je ne crois pas qu'il s'en trouve beaucoup aujourd'hui qui, dans l'exercice de leur Art, s'avifent d'avoir recours à ce que leurs anciens Confreres avoient crû pouvoir ftatuer là-deffus. Au refte je n'ai garde

K iij

de confondre avec les tables que les anciens Auteurs nous ont laissé dans leurs Ecrits, celles qui se trouvent dans le Bombardier François & dans la théorie sur le méchanisme de l'Artillerie par M. Dulacq Capitaine d'Artillerie du Roy de Sardaigne. Celles-ci ayant été faites sur les principes de Galilée qui ont été adoptés par tous les Sçavans, sont exemptes de tout soupçon, & ne peuvent qu'être utiles, supposé qu'il n'y ait point de fautes d'impression ni d'erreurs de calcul, ce qui arrive quelquefois aux ouvrages de cette nature.

Ce qui a fait que bien des gens se sont scandalisés des regles que la théorie nous enseigne, c'est qu'ils se sont apperçûs qu'elles se trouvent souvent en défaut lorsqu'on fait des épreuves, & qu'ils ne se sont pas apperçû en même tems que cela ne provenoit point du fonds de ces regles, mais uniquement des circonstanes & de grand nombre d'accidens qui sont inséparables de la pratique. Ces accidens sont, 1°. La résistance & l'agitation de l'air; par sa résistance qui est plus ou moins grande selon qu'il est plus ou moins comprimé, il diminue plus ou moins les portées, & par son agitation qui varie aussi à tout moment, il en altere les directions. 2°. L'hétérogeneité de la poudre, les trois matieres qui la composent ne se mêlent pas uniformément, quelque soin qu'on puisse y prendre, les grains n'en sont pas tous d'égale grosseur, l'air compris dans ses pores & dans ses interstices est tantôt plus ou moins comprimé de même que l'air que nous respirons; les inflammations par conséquent ne se font pas partout également, ni toujours avec la même promptitude, & les portées en souffrent de l'altération. 3°. La différence de poids & de diamétre dans les Bombes, quoique faites pour un même Mortier. Le degré de chaleur n'étant pas toujours le même quand on coule la matiere, le grain en devient plus ou moins fin, & de-là la pesanteur en devient plus ou moins grande. Toutes les parties de la matiere n'ont pas partout une égale densité, ou du moins cela est très-rare; ainsi le centre de gravité n'est pas le même que le centre de la figure. D'ailleurs les Bombes ne partent que très-difficilement selon la direction de l'ame de la piece, soit à cause que le feu n'étant pas porté directement dans le centre de la chambre, le fort de l'inflammation n'est pas toujours dans ce centre, soit parce que les Bombes ayant du vent ne peuvent pas toujours se mettre dans le Mortier, de façon que l'ame de la piece passe par leur centre de gravité, d'où il arrive

que la Bombe en partant frappe contre quelqu'un des côtés du Mortier, ce qui lui fait changer la direction qu'on prétendoit lui donner. 4°. Enfin, les négligences qu'on peut commettre en ne prenant pas exactement l'angle sous lequel on veut tirer, en n'assurant pas assez le coin de mire, en ne refoulant pas la poudre toujours également, & en n'observant pas si la piece panche d'un côté ou d'un autre. Tous ces accidens venant à se combiner entr'eux de différentes façons, peuvent produire des varietés infinies dans les portées, auxquelles il n'est pas toujours également facile de remédier.

Si cela est, dira-t-on peut-être, quel avantage pourra-t-on tirer de cette belle théorie que l'on nous vante tant? La réponse n'est pas difficile à faire. Un Officier qui joint la science à l'expérience, (car il faut l'un & l'autre pour n'être pas embarrassé dans ses opérations) un tel Officier, dis-je, après avoir fait son coup d'épreuve sçait d'abord tout ce qui arriveroit si les accidens dont nous avons parlé ne dérangeoient rien; il part donc d'un point fixe, & c'est déja beaucoup dans une matiere où la pratique la plus consommée ne trouve que de l'incertitude. Or comme il sçait que l'air résiste, & que sa résistance est d'autant plus grande que les projections sont de plus longue durée; il s'apperçoit que dans les projections qui sont au-dessous de l'angle de 45 degrés, celles qui approchent plus de cet angle doivent souffrir de plus grandes diminutions, & que lorsque les projections sont également éloignées de 45 degrés, les portées de celles qui sont au-dessus doivent être un peu moins longues que celles qui sont en-dessous; cependant à cause que nos projections se font avec beaucoup de rapidité, & que leur hauteur ni leur amplitude ne sont pas bien grandes, il en infere que la différence des portées à celles que la théorie lui donne, doit toujours avoir des bornes assez resserrées, & par conséquent il sçait encore à quoi s'en tenir, s'il ne se rencontroit que cette difficulté. Que si les dérangemens deviennent plus considérables qu'il ne les a jugés, alors sçachant bien que cela ne peut provenir que des autres accidens qui n'ont rien de commun avec la résistance de l'air, il tourne ses soins à observer que la manœuvre se fasse avec toute l'exactitude requise, & s'il ne parvient pas à la précision géométrique, du moins il s'en approche assez pour avoir l'effet qu'il souhaite, & c'est tout ce qu'on peut demander de lui, puisqu'il s'agit non pas de faire tomber une Bombe sur la pointe d'une aiguille, mais de la

faire donner sur un but qui est toujours d'une certaine étendue?

Laissons maintenant agir un Officier qui n'a que la pratique pour lui, un coup d'épreuve ne lui donnera certainement pas la connoissance des portées sous les différens angles; il faudra donc qu'il en fasse autant qu'il y a d'angles sous lesquels on peut tirer, & qu'il brûle bien de la poudre inutilement; mais quand ces épreuves seront faites, que pourra-t-il compter sur elles? les portées qu'il aura trouvées seront-elles les véritables portées? point du tout. Il faudroit pour cela qu'aucun accident ne les eût troublées, & c'est ce qui est impossible; que s'il s'attache uniquement à atteindre son but, sous combien d'angles ne faudra-t-il pas qu'il tire, & avec combien de différentes charges avant qu'il y parvienne; qui l'assurera que la charge avec laquelle il a tiré est la moins dispendieuse, & qu'on ne pourroit pas tirer avec moins de poudre & donner au but proposé sous un angle différent; passons cependant par dessus cette considération, & voyons ce qu'il fera, si par hazard les coups suivans ne lui donnent plus la même portée. Il changera de nouveau son angle, il haussera & baissera le Mortier, il augmentera la poudre, il la diminuera, il se donnera des soins fatiguans, il se tourmentera & tourmentera les autres, & presque toujours sans aucun fruit. Qu'on se désabuse donc, la Science, & surtout la Géométrie & la Physique sont ici plus nécessaires que l'on ne pense; & si quelques Auteurs ont prétendu qu'on ne pouvoit rien statuer, c'est qu'ils n'ont pas voulu se donner la peine d'étudier des principes qui leur ont paru trop abstraits, & que n'ayant pû trouver la solution de leur difficulté dans leur aveugle pratique sur laquelle ils ont fait trop de fonds, ils se sont imaginés faussement que le hazard devoit être l'unique regle des projections.

155. **Probleme.** *Trouver le cercle qui renferme toutes les amplitudes d'une même force de poudre sous différens angles, sans être obligé de chercher la plus grande hauteur du coup d'épreuve ni le paramétre de l'axe de la parabole que ce coup d'épreuve a fait décrire à la Bombe.* (*Fig.* 38.)

Soit AB l'amplitude que le coup d'épreuve m'a donné, j'éleve en A la droite indéfinie AS perpendiculaire sur AB; je fais au même point A un angle PAD égal à l'angle sous lequel j'ai fait le coup d'épreuve; je coupe l'amplitude AB en quatre parties égales, & à l'extrêmité E de son premier quart AE, j'éleve une perpendiculaire ER qui coupe la direction AP en R. Au point R, j'éleve

j'éleve fur AR le perpendiculaire RS qui coupe l'indéfinie AS au point S, & fur AS pris pour diamétre je décris le demi-cercle SRA qui eſt le demi-cercle demandé, c'eſt-à-dire le demi-cercle par lequel je puis connoître toutes les amplitudes de la même charge ſous différens angles : ce que je prouve ainſi.

Du milieu D de l'amplitude, j'éleve la perpendiculaire DT qui coupe la direction AP en P; du point R je mene NH parallelle à AD & la droite RD; ſur RD, j'éleve la perpendiculaire RT; enfin prenant HD pour axe & AD pour ordonnée, je décris la parabole AHB qui eſt la même que la Bombe a décrit quand j'ai fait le coup d'épreuve; car les triangles ſemblables RNA, PRH ſont parfaitement égaux à cauſe de NR = RH; & partant PH = NA = HD, ainſi la direction AP eſt tangente de cette parabole, comme cela doit être; or on ne peut pas décrire deux paraboles différentes qui ayent la même amplitude AB la même tangente AD au même point; donc la parabole AHD eſt celle que la Bombe a décrit.

Or à cauſe de RT perpendiculaire ſur RD, la droite TH eſt le quart du paramétre de l'axe (*N.* 135.) & TD eſt le quart du paramétre du diamétre qui paſſe par le point A; & à cauſe des triangles ſemblables & égaux SRA, TRD, nous avons SA = TD; donc SA eſt le quart du paramétre du diamétre qui paſſe par le point A.

Maintenant le demi-cercle BMA eſt précifément le même que nous avons décrit ci-deſſus (*N.* 140.) puiſque ſon diamétre AS eſt le quart du paramétre du diamétre qui paſſe par le point A de la parabole décrite par le coup d'épreuve ſous l'angle PAD, & nous avons fait voir dans cet endroit que ce cercle ſert à trouver les amplitudes de la même force de poudre ſous différens angles; donc, &c.

156. Il faut obſerver que ce demi-cercle comprend tous les quarts d'amplitude ſous différens angles, par exemple, lorſque la Bombe tirée ſous l'angle DAC (*Fig.* 36.) décrit la parabole AHC, la droite LT eſt le quart de l'amplitude AC, & lorſque la même Bombe ſous l'angle MAX décrit la parabole ARX, la droite NM eſt le quart de ſon amplitude AZ, & ainſi des autres.

157. PROBLEME. *Trouver les différentes amplitudes d'une même force de poudre ſous différens angles, & les angles convenables à différentes amplitudes propoſées ſans avoir beſoin de recourir aux tables.*

Je conftruis fur un papier une échelle que je divife en deux mille parties qui repréfenteront des toifes; j'ai choifi le nombre de deux mille, parce qu'il eft la plus grande amplitude d'une Bombe pouffée fous l'angle de 45 degrés avec la plus grande charge. Cette échelle étant faite, je fais un coup d'épreuve fous un angle quelconque, & après avoir mefuré exactement fa portée. Je mene fur un papier une ligne droite indéfinie AZ (*Fig.* *39.*) je prens fur l'échelle avec le compas une grandeur égale au quart de la portée que j'ai trouvé, & je la porte fur AZ de A en B. Je fais en A un angle MAZ égal à l'angle fous lequel j'ai fait le coup d'épreuve; j'éleve fur les points A & B deux perpendiculaires AC, BR; du point R où BR coupe la direction AM, j'éleve RC perpendiculaire fur AR, & enfin autour de AC pris pour diamétre, je décris le demi-cercle CRA, & ce demi-cercle eft celui qui comprend tous les quarts d'amplitude fous différens angles de la charge avec laquelle j'ai fait le coup d'épreuve, (*N.* 155.)

Maintenant fi je veux fçavoir quelle fera l'amplitude fous un autre angle, je fais en A un angle SAZ égal à l'angle donné, & du point S où la jambe SA coupe le demi-cercle CRA, je mene la perpendiculaire ST fur le diamétre CA, puis prenant avec le compas la grandeur TA, je la porte fur mon échelle, & trouvant qu'elle vaut un certain nombre de toifes, je quadruple ce nombre pour avoir l'amplitude convenable à l'angle SAZ.

De même, fi je veux fçavoir quel eft l'angle convenable à une amplitude demandée, je prens fur mon échelle une grandeur égale au quart de cette amplitude, je la porte fur AZ de A en T, & au point T j'éleve une perpendiculaire TS; fi cette perpendiculaire coupe le cercle en deux points V, S, je mene de ces deux points les droites VA, SA, ce qui me donne deux différens angles VAZ, SAZ fous lefquels je puis avoir l'amplitude demandée; que fi TS touchoit le cercle fans le couper, je n'aurois qu'un angle fous lequel je pourrois tirer, & cet angle feroit celui de 45 degrés; mais fi TS ne coupoit point le cercle, l'amplitude demandée feroit plus grande qu'il ne faut pour pouvoir y atteindre avec la même charge.

Comme une échelle divifée en deux mille parties dont chacune feroit un peu fenfible devroit néceffairement être fort longue, ce qui demanderoit un papier trop grand, on peut en faire une qui n'en contienne que le quart, c'eft-à-dire cinq cens parties

égales, & on s'en servira de la même façon, puisqu'on n'a besoin dans cette pratique que des quarts d'amplitude.

Que si une échelle de 500 parties sensibles étoit encore trop grande, on en feroit une autre qui n'en contiendroit que la moitié, c'est-à-dire 250 parties, & alors comme cette échelle représenteroit la huitiéme partie de l'amplitude de la plus forte charge, il faudroit construire un cercle qui ne contînt que la huitiéme partie des amplitudes de la charge avec laquelle on auroit fait l'épreuve, ce qui se fait ainsi.

Supposons qu'après avoir tiré sous un angle RAZ (*Fig.* 40.) & avoir pris le quart AB de l'amplitude trouvée, je m'apperçoive que le demi-cercle CRA qui contient tous les quarts d'amplitude de la même charge demanderoit un papier trop grand, je prens la huitiéme partie de cette amplitude, c'est-à-dire la moitié du quarr AB, je la porte de A en H, j'éleve la perpendiculaire HS, & au point S j'éleve sur AS la perpendiculaire ST, puis autour du diamétre TA je décris le demi-cercle TSA qui contiendra tous les huitiémes des amplitudes de la même charge; car à cause des triangles semblables ASH, ARB, nous aurons AS. AR :: AH. AB, & par conséquent AS $= \frac{1}{2}$ AR, & à cause des triangles semblables ASV, ARX, nous aurons VS. XR :: AS. AR, & partant VS $= \frac{1}{2}$XR: or dans le demi-cercle CRA la droite RX est le sinus de l'angle double de l'angle RAZ de projection, (*N.* 143.) & dans le demi-cercle TSA la droite VS est aussi le sinus de l'angle double du même angle RAZ ou SAZ; donc le sinus XR est double du sinus VS. Que si je veux tirer sous un autte angle LAZ, je trouverai de même que dans le cercle CRA le sinus LP de l'angle double de l'angle LAZ est aussi double du sinus MN de l'angle double du même angle LAZ ou NAZ; car à cause des triangles semblables CRA, TSA, nous aurons CA. TA :: AR. AS, & partant CA $=$ 2TA; or les demi-cercles étant semblables, les sinus PL, MN correspondant aux mêmes angles sont proportionnels à leur diamétre, & par conséquent PL $=$ 2MN; puis donc que tous les sinus du demi-cercle CRA sont doubles de tous les sinus correspondans du demi-cercle TSA, & que les sinus du demi-cercle CRA sont les quarts d'amplitude de la charge avec laquelle l'épreuve a été faite, il s'ensuit que les sinus du demi-cercle TSA sont les huitiémes des mêmes amplitudes.

Pour me servir donc de ce demi-cercle qui contient les hui-

tiémes des amplitudes, ſuppoſons qu'on demande l'amplitude convenable à l'angle NAZ; je mene du point N où la direction NA coupe le demi-cercle TSA, la droite NM perpendiculaire ſur le diamétre TA, & prenant MN, je la porte ſur mon échelle, puis je multiplie la quantité de toiſes que je trouve qu'elle vaut par 8, & le produit eſt l'amplitude demandée.

Et ſi on me demande quel eſt l'angle qui convient à une certaine amplitude, je prens ſur mon échelle une quantité égale à la huitiéme partie de cette amplitude, je le porte de A en Q, & j'éleve la perpendiculaire QN; ſi cette perpendiculaire coupe le demi-cercle TSA en deux points O, N, je mene les droites OA, NA qui me donnent deux angles ſous leſquels je puis tirer pour avoir l'amplitude demandée, &c.

Il eſt viſible que ſi le diamétre TA n'étoit que le quart du diamétre CA, le demi-cercle TSA ne contiendroit que les moitiés des huitiémes, c'eſt-à-dire les ſeiziémes parties des amplitudes; ainſi on pourroit ſe ſervir de ce cercle, ſi l'on trouvoit que le cercle précédent fût encore trop grand; par exemple, ſi l'on vouloit l'amplitude convenable à l'angle NAZ, on prendroit avec le compas la grandeur MN que l'on porteroit ſur l'Echelle pour avoir ſa valeur en toiſes; mais comme dans la ſuppoſition que nous venons de faire, MN ne ſeroit que le ſeiziéme de l'amplitude, on multiplieroit ſa valeur par 16, ou par 4, & le produit enſuite par 4, ce qui donneroit l'amplitude demandée; & ſi on demandoit l'angle convenable à une amplitude, on diviſeroit cette amplitude par 16, ou par 4, & le quotient par 4, & portant ce dernier quotient de A en Q, le reſte s'acheveroit comme cideſſus.

On me dira peut être qu'il n'eſt pas facile de faire une échelle diviſée exactement; c'eſt pourquoi pour prévenir cet embarras, voici un inſtrument ſimple, portatif, & extrêmement commode, dont on pourra ſe ſervir. Cet inſtrument eſt compoſé de deux Régles, ſemblables à celles d'un pied de Roy, qui ſe joignent de même par une charniere; mais au lieu de donner 6 pouces de longueur à chacune de ces Régles, je voudrois leur en donner 8, afin que les diviſions fuſſent plus ſenſibles; ces deux Régles étant miſes en ligne droite, on fera diviſer la longueur totale en 250 parties; ſçavoir, les deux cens premieres de 20 & 20, les 50 autres de 10 en 10, & la derniere de celle-ci en 10 parties égales qui repreſenteront des toiſes; & l'échelle ſera faite,

& sa longueur totale sera la huitiéme partie de la plus grande amplitude avec la plus forte charge. Ainsi on pourra s'en servir, comme ci-dessus, pour des cercles qui contiendront les huitiémes ou les seiziémes des amplitudes, &c.

J'ai beaucoup insisté sur la pratique dont je viens de parler, non-seulement parce qu'elle est extrémement aisée, mais encore à cause qu'elle dispense d'avoir recours à des Tables imprimées qui sont souvent sujettes à des erreurs ou de calcul ou d'impression.

158. PROBLEME. *Trouver l'angle sous lequel il faut tirer avec une charge donnée pour atteindre un but situé au-dessus ou au-dessous du niveau de la batterie.*

Il faut d'abord faire un coup d'épreuve sous l'angle de quinze degrés, & mesurer exactement l'amplitude qu'il aura donné; le double de cette amplitude sera (*N.* 148.) l'amplitude de 45 degrés, c'est-à-dire la plus grande, & la moitié de la plus grande amplitude ou l'amplitude de 45 degrés, sera le diamétre du cercle qui renferme les amplitudes de toutes les projections de la charge de poudre donnée (*N.* 149.); cela fait, il faut mener sur un papier deux lignes AB, AC (*Fig.* 41.) perpendiculaires l'une sur l'autre, & faire la verticale AC égale à l'amplitude de quinze degrés ou à la demi plus grande amplitude, & mener du point C une ligne CZ indéfinie & paralelle à l'horizontale.

Maintenant si le but sur lequel on veut tirer est au-dessus de l'horizon de la batterie comme le point P; il faut mesurer par la Trigométrie, ou autrement sa distance horizontale AB, & sa hauteur BP, & transporter ces mesures sur le papier par le moyen d'une Echelle. Du point A pris pour centre & avec un rayon égal au diamétre AC; il faut décrire un arc CRS, & du point P pris pour centre, & avec un rayon égal à la distance PZ du but à la ligne CZ, on décrira un autre arc ZRS; si les deux arcs ne se coupent point, il sera impossible d'atteindre au but proposé avec la charge donnée, & si les deux arcs se coupent en deux points R, S, il faut prendre ces points pour les foyers de deux paraboles AHP, ADP qui auroient pour directrice la droite CZ, & ce seront les deux paraboles que la bombe peut décrire pour atteindre le but. Enfin, si les deux arcs se touchoient sans se couper, on prendroit le point d'attouchement pour le foyer d'une parabole dont la directrice seroit la droite CZ, &

cette parabole feroit alors l'unique que la bombe pourroit décrire pour frapper au but.

La raifon de ceci eft facile à deviner, fi l'on fait attention que la perpendiculaire AC menée du point A fur la directrice CZ de la parabole AHP étant égale à la droite AR menée du point A au foyer R de cette parabole ; il s'enfuit néceffairement que cette parabole doit paffer par le point A de projection, & comme la perpendiculaire PZ menée du point P fur la même directrice eft égale à la droite PR menée du même point P au foyer de cette parabole, il s'enfuit encore que cette parabole paffera auffi par le but P ; (tout cela a été démontré dans les Sections Coniques) & on démontrera de la même façon que la parabole dont le foyer eft le point S, & la directrice eft CZ doit auffi paffer par les points A, P.

Pour trouver l'angle fous lequel la Bombe doit décrire la parabole AHP, il faut mener du point C au foyer R de cette parabole la droite CR, couper cette droite en deux également au point M, & du point A par le point M, mener la droite AMV qui fera tangente de la parabole, comme il a été démontré dans les Sections Coniques, & par conféquent l'angle VAB fera l'angle demandé ; de même menant du point C au foyer S de l'autre parabole AVP la droite CS, & la coupant en deux également en X, la droite XA fera la tangente, & l'angle XAB fera l'angle fous lequel la Bombe décrira la parabole ADP.

On trouveroit de la même façon les angles fous lefquels la Bombe peut atteindre un but fitué au-deffous de l'horizon de la batterie, ainfi que la Figure 42 le fait voir.

159. Remarque. Ce Problême a été réfolu de grand nombre d'autres façons différentes par la plupart des Auteurs qui ont écrit fur les Méchaniques ; mais comme la folution que je viens de donner, & qui eft de M. de la Hire, eft la plus naturelle & en même-tems la plus commode, furtout lorfqu'on fe fert d'une Echelle fur le papier ; j'ai crû devoir la préferer aux autres dont l'ufage feroit plus embarraffant.

160. M. de la Hire, après avoir donné la conftruction de ce Problême, nous apprend de quelle maniere on peut trouver l'angle où les angles fous lefquels la bombe peut atteindre le but, lorfqu'on veut agir par la Trigonométrie ; mais pour mieux faire entendre ce qu'il dit, je crois qu'il eft néceffaire de faire attention aux principes fuivans.

161. *Si une ligne* AB (Fig. 43.) *est coupée en deux également au point* C, *le produit de l'une de ses parties* BC *par le quadruple de l'autre partie* AC *est égal au quarré de toute la ligne* AB; *mais si la même ligne* AB *est divisée en deux parties inégales au point* D, *le produit de l'une de ses parties* BD *par le quadruple de l'autre partie* AD *est moindre que le quarré de la ligne entiere* AB, *d'une quantité égale au quarré de la difference des deux parties* BD, AD.

A cause de BC=AC, le produit de BC par 4AC est égal au produit de AC par 4AC, & par conséquent il est égal à $4\overline{AC}^2$, c'est-à-dire à quatre quarrés de la moitié AC de la ligne AB; mais le quarré de la ligne AB est aussi égal à quatre quarrés de sa moitié AC; donc le produit de la partie BC par le quadruple de la partie AC est égal au quarré de la ligne AB. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Le produit de la partie inégale BD par le quadruple de l'autre partie inégale AD est BD×4AD, & le quarré de la ligne AB ou AD+DB, est $\overline{AD}^2+2AD\times DB+\overline{DB}^2$; retranchant donc de ce quarré le produit BD×4AD, le reste est $AD-2AD\times DB+\overline{DB}^2$; or, la racine quarrée de ce reste est AD—DB, car AD—DB multiplié par lui-même, donne $\overline{AD}^2-2AD\times DB+\overline{BD}^2$, & AD—BD est la différence des parties inégales DB, AD; donc le quarré de la ligne AD+DB surpasse le produit BD×4AD d'une quantité égale au quarré de la différence AD—DB des parties inégales. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

162. *Lorsqu'une Bombe peut atteindre un but* P *qui n'est pas au niveau de la batterie* (Fig. 44.) *en parcourant deux differentes paraboles; si du milieu* O *de la ligne* AP *tirée de la batterie au but, on mene une droite* OV *perpendiculaire sur la directrice* CZ, *cette droite coupera les deux paraboles en deux points differens* H, *h*.

Par la construction du Problême, les cercles décrits avec les rayons AC, PZ se coupent en deux points R, S, l'un en dessus de la ligne AP, & l'autre en dessous, & par conséquent le foyer R de l'une des paraboles étant plus proche de la directrice CZ que le foyer S de l'autre, l'axe QL de la premiere doit être plus grand que l'axe TI de la seconde; or, la ligne AL étant ordonnée à l'axe QL, & la ligne AI ordonnée à l'axe TS; si du point A, on mene une tangente à la parabole AQP, la soutangente YL sera double de l'axe QL, & si du même point A, on mene

une tangente à la parabole ATP, la soutangente NI sera double de l'axe TI, ainsi YL sera plus grand que NI, & delà il est aisé de conclure que dans le triangle rectangle YAL, l'angle YAL est plus grand que l'angle NAI du triangle rectangle NAI, & que par conséquent AY doit couper la droite OV en un point V plus éloigné de O, que le point *u* où la droite AN coupe la même droite OV.

Or, la droite OV étant paralelle aux deux axes des deux paraboles est diamétre de l'une & de l'autre, & par conséquent la droite AP qui se termine de part & d'autre aux deux paraboles, & qui est coupée en deux également en O, est une double ordonnée à ce diamétre dans l'une & dans l'autre parabole; & comme elle est menée du point d'attouchement de la parabole AQT, la soutangente VO doit être double de l'abscisse HO, & de même à cause que AP est aussi menée du point d'attouchement A de la parabole ATP, la soutangente *u*O doit être double de l'abscisse *h*O. Mais nous venons de voir que la soutangente VO est plus grande que la soutangente *u*O; donc l'abscisse HO est aussi plus grande que l'abscisse *h*O, & par conséquent la droite OV coupe les deux paraboles en deux points différens H, *h*.

163. *Supposant toujours que du milieu du point* O *soit menée la droite* OV *perpendiculaire à la directrice; je dis que la partie* HE *de cette ligne comprise entre la directrice* CZ, *& la parabole* AQP *est le quart du parametre du diametre* OH, *de cette parabole, & que la partie* hE *comprise entre la même directrice, & l'autre parabole* ATP *est le quart du parametre du diametre* hO *de cette parabole.*

Du point H, je mene au foyer R de la parabole AQP la droite HR, laquelle par la proprieté de la parabole est égale à HE; or, HR est le quart du paramétre du diamétre HO, donc HE est aussi le quart de ce paramétre. De même, si du point *h*, je mene au foyer S de la parabole ATP la droite *h*S, cette droite *h*S sera égale à *h*E, & aussi au quart du paramétre du diamétre *h*O.

164. *Posant encore les mêmes choses, je dis que le quart* HE *du parametre du diametre* HO *de la parabole* AQP *est égal à l'abscisse* hO *de la parabole* ATP, *& que réciproquement le quart* hE *du parametre du diametre* hO *de la parabole* ATP, *est égal à l'abscisse* HO *de la parabole* AQP.

Dans la parabole AQP, nous avons $\overline{AO}^2 = HO \times 4HE$, & dans la parabole ATP, nous avons $\overline{AO}^2 = hO \times 4hE$, donc $HO \times 4HE$ =

$=hO\times4hE$, & partant $HO\times HE=hO\times hE$, c'eſt-à-dire la ligne OE eſt diviſée en H en deux parties EH, HO, & en *h* en deux autres parties *h*O, *h*E qui ſont réciproques aux deux EH, HO; or, nous avons démontré dans la Géométrie (*Livre II. N.* 188.) qu'une ligne droite OE ne peut être diviſée de cette façon, à moins que les deux parties EH, HO ne ſoient égales chacune à chacune aux deux *h*O, *h*E, donc EH=O*h*, & HO=*h*E.

165. *Poſant encore les mêmes choſes, je dis que les tangentes* AV, A*u*, *coupent le diamétre* OV *en deux points* V, u *également éloignés de part & d'autre de la directrice* (Fig. 44.).

La ſoutangente VO étant double de l'abſciſſe OH, nous avons OH=VH=EH+EV; donc EV eſt la différence de la ligne OH à la ligne EH. De même la ſoutangente *u*O étant double de l'abſciſſe O*h*, nous avons O*h*=*hu*=E*h*—E*u*, & par conſéquent E*u* eſt la différence de la ligne E*h* à la ligne *h*O, mais la différence de la ligne OH à la ligne HE eſt égale à la différence de la ligne E*h* à la ligne O*h*, donc EV=E*u*.

166. Voyons maintenant de quelle façon M. de la Hire nous enſeigne de trouver les angles VAL, *u*AL ſous leſquels la Bombe peut atteindre le but.

La ligne AC eſt connue, puiſqu'elle eſt égale à la moitié de la plus grande amplitude de la charge de poudre donnée. On connoîtra par la Trigonométrie ou autrement la diſtance horizontale AB du but à la batterie, ſa hauteur BP, & ſa diſtance PZ à la directrice CZ, à cauſe que BZ=CA, & par conſéquent PZ =CA—BP; dans le trapezoïde ACZP la droite OE coupe les côtés non paralelles chacun en deux également, ainſi OE eſt égal à la moitié de la ſomme des droites AC, ZP; de plus dans le triangle rectangle ABP dont les trois côtés feront connus, on connoîtra l'angle PAB, ce qui donnera la valeur de l'angle PAC complement à un droit de l'angle PAB. Enfin, l'angle VOA joint à l'angle VOP vaut deux droits, & par conſéquent ſi de la valeur de deux droits on ôte l'angle VOP égal à l'angle CAP, le reſte ſera la valeur de l'angle VOA.

Toutes ces choſes étant ainſi connues, il s'agit de connoître la quantité EV qu'il faut ajouter à la droite OE pour avoir le côté OV du triangle OVA, ou qu'il faut retrancher de cette même ligne OE pour avoir le côté O*u* du triangle O*u*A; car les côtés AO, OV du triangle AOV ſe trouvant alors connus de même que l'angle compris AOV, on trouvera aiſément l'an-

l'angle VAO, lequel étant ajouté à l'angle PAB, donnera l'angle VAB, sous lequel il faut tirer pour faire décrire à la Bombe la parabole AQP, & de même dans le triangle *u*AO la connoissance des côtés AO, O*u*, & de l'angle compris donnera la connoissance de l'angle *u*AO, & celui-ci ajouté à l'angle PAB fera connoître l'angle *u*AB, sous lequel la Bombe doit décrire la parabole ATP.

Or, nous sçavons que le quarré de AO est égal au rectangle OH×4HE, & que si du quarré de OE on retranche le rectangle OH×4HE, le reste est le quarré de la différence des lignes OH, HE, & par conséquent le quarré de VE, ou de E*u* qu'il faut ajouter ou retrancher de OE; donc si du quarré de OE on retranche le quarré de AO, le reste sera le quarré de VE ou E*u*, & par conséquent tirant la racine quarrée de ce reste, on aura la valeur de VE.

167. Dans le cas où la Bombe ne pourroit atteindre le but que par une seule parabole; les deux cercles décrits avec les rayons AC, PZ (*Fig.* 45.), se toucheroient sans se couper, & par conséquent le point d'attouchement R seroit sur la droite AP qui passe par les deux centres; ainsi AP seroit égal à la somme des rayons AC, PZ, & AO moitié de AP seroit égal à la moitié de cette somme, c'est-à-dire égal à OE, & le quarré de AO seroit égal au quarré de OE; or, par la proprieté de la parabole on auroit $\overline{AO}^2 = OH \times 4HE$; donc $OH \times 4HE = \overline{OE}^2$, & par conséquent le point H diviseroit la ligne OE en deux également; car si les lignes OH, HE n'étoient pas égales, on auroit OH×4HE moindre que $\overline{OE}^2$ (*N.* 161.), ce qui est contre la supposition; ainsi dans ce cas la tangente AE couperoit la ligne OE au point E où elle coupe la directrice, & le triangle EOA seroit isoscele. C'est pourquoi l'angle EOA étant connu, les deux autres pris ensemble seroient égaux au complement à deux droits de l'angle EOA, & la moitié de ce complement seroit la valeur de l'angle EAO, après quoi l'on acheveroit le reste aisément.

Dans la pratique, après avoir cherché les angles PAB (*Fig.* 44.) PAC, EOA, il faut prendre la moitié de la somme des droites AC, PZ, en faire le quarré, & retrancher de ce quarré le quarré de AO, s'il ne reste rien, le triangle EAO (*Fig.* 45.) est isoscele, & par conséquent l'angle EAO se connoîtra aisément, & cet angle ajoûté à l'angle PAB donnera l'angle EAB sous lequel il

faut tirer ; mais si après avoir retranché du quarré de EO le quarré de AO, il reste quelque chose, on tirera la racine quarrée du reste, & cette racine quarrée sera la quantité qu'il faudra ajouter à EO ou lui retrancher pour avoir les triangles VAO, *u*AO (*Fig.* 44.), & par le moyen de ces triangles on connoîtra les angles VAO, *u*AO, à chacun desquels ajoutant l'angle PAB, on aura les angles VAB, *u*AB sous lesquels la Bombe peut atteindre le but.

168. Tout ce que je viens de dire est fort ingénieux, mais dans la pratique, j'aimerois mieux m'en tenir à chercher les choses par le moyen d'une échelle, comme j'ai dit ci-dessus, ce qui est beaucoup moins embarrassant. Que si on trouvoit qu'en prenant les mesures sur l'échelle, dont j'ai donné la construction, les Figures 41 & 42 deviendroient trop grandes, on les diminueroit en cette sorte : Je prendrois le quart de AC, aux deux extrémités de ce quart, j'éleverois deux perpendiculaires que je ferois égales chacune au quart de AB sur l'extrémité B du quart de AB, j'éleverois une perpendiculaire que je ferois égale au quart de BP, après quoi avec le quart de AC, & le quart de PZ, je décrirois les deux cercles qui se couperoient, ou qui se toucheroient, selon qu'il y auroit deux paraboles, ou une seule, & achevant le reste, comme ci-dessus (*N.* 158.), je prendrois avec le rapporteur les angles VAO, *u*AO (*Fig.* 44.) ou l'angle EAO (*Fig.* 45.), selon qu'il y auroit deux paraboles ou une seule.

169. *Remarque.* Avant que de finir cette matiere, je rapporterai ici une autre méthode de mon invention pour trouver aisément la façon d'atteindre un but situé au dessus ou au dessous du niveau de la batterie. Cette méthode dépend du principe suivant.

170. *Si l'on coupe en quatre parties égales l'amplitude* AC (Fig. 46.) *d'une parabole* ABC, *& que des points de division on éleve des perpendiculaires* MN, TB, SR *qui coupent la parabole aux points* M, B, S. *Je dis que les deux perperpendiculaires* MN, RS *qui sont à gauche & à droite de la perpendiculaire* TB *sont égales entr'elles, & que la perpendiculaire* TB *surpasse chacune des deux autres d'une quantité égale à leurs tiers.*

Puisque AC est l'amplitude de la parabole, & que TB est perpendiculaire sur le milieu de cette amplitude ; il est clair que TB est l'axe ; menant donc du point S l'ordonnée SP, laquelle

fera paralelle & égale à TR, nous aurons $\overline{SP}^2 = BP \times a$, en nommant le paramétre $= a$, & par conféquent $\overline{TR}^2 = BP \times a$; or, nous aurons auffi $\overline{CT}^2 = BT \times a$; donc $\overline{CT}^2 - \overline{TR}^2 = BT \times a - BP \times a = TP \times a$; mais à caufe des paralelles, nous avons $TP = SR$, donc $\overline{CT}^2 - \overline{TR}^2 = SR \times a$. Menant de même du point N une ordonnée à l'axe, nous trouverons en faifant les mêmes raifonnemens $\overline{AT}^2 - \overline{MT}^2 = NM \times a$; mais $\overline{AT}^2 - \overline{MT}^2 = \overline{CT}^2 - \overline{TR}^2$, à caufe de $AT = CT$, & de $MT = TR$, donc $NM \times a = SR \times a$, & par conféquent $NM = SR$. Ce qu'il falloit premierement démontrer.

Nous venons de trouver $\overline{SP}^2 = BP \times a$, & $\overline{CT}^2 = TB \times a$, donc $\overline{SP}^2 . \overline{CT}^2 :: BP \times a . TB \times a :: BP . TB$; or, $\overline{SP}^2 = \overline{TR}^2$, à caufe de $SP = TR$, & comme TR n'eft que la moitié de TC, le quarré de TR n'eft que le quart du quart du quarré de CT, donc $\overline{TR}^2$ ou $\overline{SP}^2 = \frac{1}{4}\overline{TC}^2$, & par conféquent $\frac{1}{4}\overline{CT}^2 . \overline{CT}^2 :: BP . TB$, ou $\frac{1}{4} . 1 :: BP . TB$, ou $1 . 4 :: BP . TB$, c'eft-à-dire BP eft le quart de BT ou le tiers de TP; mais TP eft égal à SR, donc l'excès de BP fur SR ou fur fon égale MN eft égal au tiers de SR. Ce qu'il falloit fecondement démontrer.

171. **Probleme.** *Atteindre un but fitué au-deffus ou au-deffous du niveau de la batterie par le moyen du principe précédent.*

Soit la batterie au point A (*Fig.* 47.) & le but P fitué au-deffus du niveau; je mefure par la Trigonometrie ou autrement la diftance horizontale AN du but à la batterie, & fa hauteur NP au-deffus du niveau. Je coupe AN en trois parties égales AR, RS, SN, j'ajoute à AN une partie NT égale à $\frac{1}{3}$ AN. J'éleve en S la perpendiculaire SO que je fais égale à $NP + \frac{1}{3} NP$, & la parabole AOT qui aura pour hauteur ou pour axe la droite SO, & pour ordonnée la droite AS moitié de AT paffera par le but P; car l'amplitude AT étant en quatre parties égales, la perpendiculaire SO menée du poinr de milieu S furpaffe chacune des perpendiculaires NP, RH menées des deux autres points R, N d'une quantité égale à leur tiers; donc les points H, P font à la parabole (*N.* 170.)

Si le but P eft au-deffous du niveau AR de la batterie A (*Fig.* 48.) je prens la diftance horizontale & la profondeur RP. Je

partage AR en trois parties égales AN, NT, TR; sur l'extrêmité N de la premiere partie AN, j'éleve la perpendiculaire BN que je fais égale au tiers de la profondeur RP, & la parabole qui aura pour axe la droite BN & pour ordonnée, le tiers AN passera par le point P, ce que je démontre ainsi.

Du point P je mene PH paralelle & égal à AR, je divise PH en trois parties égales PO, OE, EH qui seront égales chacune à chacune aux trois parties égales de AR; j'ajoute à PH la partie HS égale au tiers de PH. Des points H, E, O j'éleve les perpendiculaires HA, EB, TO & AH chacune égales à RP, je fais EB égal à TO$+\frac{1}{3}$TO; ainsi la parabole qui aura pour axe la droite EB, & pour ordonnée la droite SE ou EP, passera par les points A, T (*N.* 170.) or les arcs SA, TP de cette parabole sont la continuation de la courbe parabolique ABT, dont l'axe BN est le tiers de NE ou RP, & l'ordonnée AN est le tiers de AR; donc la parabole ABT étant continuée du côté de P doit passer par le point P.

La regle est donc lorsque le but est au-dessus de l'horizon de la batterie, d'ajouter à la distance horizontale AN du but, (*Fig.* 47.) le tiers de cette distance, & à sa hauteur NP son tiers pour avoir l'amplitude AT, & la hauteur SO de la parabole qui doit passer par le but P, & lorsque le but P est en dessous de l'horizon (*Fig.* 48.) de prendre les deux tiers AT de la distance horizontale AR, & le tiers de la profondeur RP pour avoir l'amplitude AT, & la hauteur BN de la parabole qui passera par le but P.

L'angle sous lequel on doit tirer dans l'un & l'autre cas est facile à trouver; car on sçait que pour trouver la tangente il n'y a qu'à prolonger l'axe SO (*Fig.* 49.) faire OM=SO, mener la droite MA, & l'angle MAS sera l'angle demandé.

Il ne reste donc plus qu'à trouver la charge qu'il faut employer pour atteindre ce but en tirant sous l'angle trouvé; ce que nous tâcherons de découvrir, après avoir fait les remarques suivantes.

172. *Si avec un même mortier, mais avec deux charges différentes, l'on tire une même Bombe sous un même angle, les deux amplitudes de ces deux charges seront entr'elles comme les diamétres des demi-cercles qui comprennent les projections de ces différentes charges.*

Supposons que le demi-cercle ABC (*Fig.* 50.) comprenne les différentes amplitudes des projections faites avec la premiere charge, & que le demi-cercle DEC comprenne les différentes

amplitudes des projections faites avec la seconde charge; supposons encore qu'on ait tiré avec ces deux charges sous le même angle ECP, les deux demi-cercles étant semblables entr'eux, & l'angle BCP égal à l'angle ECP, la droite BH sinus de l'angle double de l'angle BCP, sera au sinus total ou au rayon du demi-cercle ABC, comme la droite EV sinus de l'angle double du même angle BCF ou ECF est au sinus total ou au rayon du demi-cercle DEA; or le sinus HB du demi-cercle ABC est le quart de l'amplitude CR de la premiere charge de poudre, & le sinus EA est le quart de l'amplitude CP de la seconde charge; donc l'amplitude CR est à l'amplitude CP, comme le rayon du demi-cercle ABC est au rayon du demi-cercle DEC, ou comme le diamétre AC est au diamétre DC.

173. Donc, *les forces de deux charges différentes sont entr'elles comme les racines des amplitudes de ces deux charges sous les mêmes angles*, les forces des deux charges sont entr'elles comme les racines des diamétres AC, DC; or ces diamétres sont comme les amplitudes CR, CP; donc les forces sont aussi comme les racines des amplitudes sous les mêmes angles.

174. De-là il suit qu'avec deux différentes charges & sous un même angle on ne peut pas avoir la même amplitude; car les forces étant différentes, les amplitudes qui sont comme les quarrés de ces forces seront aussi différentes.

Deux différentes charges sous un même angle & dans un même Mortier, ne seront pas toujours entr'elles en même raison que leurs amplitudes.

Par des expériences constantes, on a éprouvé que s'il arrive qu'après avoir tiré par exemple avec quatre onces, & ensuite avec huit sous le même angle, les amplitudes soient entr'elles comme quatre & huit, il arrivera lorsqu'on voudra tirer avec trois & ensuite avec six, ou avec cinq & ensuite avec dix, que les amplitudes ne seront plus dans la raison de trois à six, ou de cinq à dix; non plus que si on vouloit tirer avec une livre, puis avec deux, ou avec deux, puis avec quatre, &c. de façon que le rapport des amplitudes, loin d'être toujours comme le rapport des charges, c'est-à-dire comme le rapport 1, 2 est quelquefois plus grand & quelquefois moindre, & qu'à mesure que les deux charges deviennent plus fortes en conservant toujours le rapport de 1 à 2, le rapport des amplitudes devient moindre, sans garder

aucun ordre fixe sur lequel on puisse établir des regles certaines. Cela provient des différentes inflammations de la poudre, des différentes vîtesses de ces inflammations, des poids différens des Bombes, quoique faites pour le même Mortier & de grand nombre d'autres accidens, dont il est inutile de faire le détail.

Pour venir maintenant à déterminer la charge qui convient lorsqu'on a trouvé par le moyen du Problême précedent la parabole qui doit passer par un but situé au-dessus ou au-dessous de l'horizon. Supposons que j'ai trouvé que c'est la parabole AEH (*Fig.* 51.) je coupe l'amplitude AH en quatre parties égales en P, T, V; sur le point P j'éleve la perpendiculaire PM qui coupe la tangente AS en M; j'éleve en M la droite BM perpendiculaire sur AM & qui coupe en B la verticale AB, & décrivant sur AB pris pour diamétre le demi-cercle BMA, ce demi-cercle comprendra les différentes projections de la charge de poudre nécessaire pour faire décrire à la Bombe la parabole AEH sous l'angle SAH. Maintenant si je connois le demi-cercle qui comprend les différentes projections d'une charge de poudre connue, & que le diamétre de ce demi-cercle se trouve égal au diamétre AB, il est clair que cette charge de poudre connue sera celle que je cherche pour atteindre au but P; mais si ce diamétre n'est pas égal au diamétre AB, tel qu'est par exemple le diamétre AC, moindre que AB; l'amplitude de la charge connue sous l'angle SAH sera à l'amplitude de celle que je cherche sous le même angle comme le diamétre AC au diamétre AB (*N.* 172.) c'est pourquoi si les charges étoient comme les amplitudes sous les mêmes angles, une Regle de Trois suffiroit pour me faire trouver la charge que je cherche en disant : AC est à AB comme la charge connue est à un quatriéme terme qui feroit la charge cherchée. Or quoique cela ne soit pas, comme on a vû ci-dessus, je cherche néanmoins ce quatriéme terme, & tirant avec cette charge sous l'angle SAH, j'examine si l'amplitude est plus grande que AH ou moindre; si elle est plus grande, je diminue la charge de quelque chose, & si elle est moindre, je l'augmente de quelque chose, & par ce moyen au bout de deux ou trois coups, je tire avec assez de précision pour pouvoir atteindre à mon but qui, comme on sçait, n'est jamais un point mathématique qui demande toute la précision de la Géometrie.

Que si je ne connois point le demi-cercle d'aucune des charges connues sous lesquelles on peut tirer, je fais un coup d'é-

preuve avec l'une de ces charges, & cherchant par le moyen de son amplitude le demi-cercle qui convient à toutes ses projections, j'acheve le reste comme auparavant.

On me dira sans doute que cette méthode est tâtonneuse, & cela est vrai; mais les autres, telle que celle de M. de la Hire qu'on a vû ci-dessus, le sont aussi à cause de la résistance de l'air & des autres accidens qui alterent les portées, & dèslors je crois qu'il vaut mieux choisir celle que l'on peut pratiquer plus aisément; il ne s'agit donc plus que de sçavoir s'il n'est pas plus aisé de trouver l'angle sous lequel on doit tirer en suivant ma méthode, qu'en suivant les autres, & c'est ce que je laisse au jugement du Public.

175. Nous parlerons bien-tôt de la force avec laquelle une Bombe frappe un corps qu'elle rencontre dans un point quelconque de la parabole qu'elle décrit & de ses différens enfoncemens dans les terres, selon qu'elle parcourt différentes paraboles; mais auparavant il faut que nous traitions des loix du choc des corps.

Des Loix du Choc des Corps.

176. On distingue trois especes de corps solides qui sont les seuls dont nous parlons ici; les corps *mols*, les corps *durs*, & les corps *élastiques* ou *à ressort*.

Un corps *mol* est celui qui venant à choquer un autre corps change de figure, sans reprendre celle qu'il avoit auparavant.

Un corps *dur* est celui qui venant à choquer un autre corps ne change point de figure; enfin un corps *élastique* ou *à ressort*, est celui qui par le choc change d'abord de figure, & la reprend bien-tôt après. La force que ce corps a de reprendre sa figure, se nomme force *élastique*.

Comme nous ne connoissons point dans la Nature de corps qui soient parfaitement durs, ou qui soient privés de toute force élastique, nous nous bornerons ici à parler du choc des corps mols & de celui des corps élastiques; & quoiqu'il n'y ait guéres de corps mols qui n'ayent un peu d'élasticité, c'est-à-dire qui après le choc ne reprennent un peu de leur premiere figure, cependant à cause que leur force élastique est ordinairement imperceptible, & par conséquent capable d'un effet dont on ne peut s'appercevoir, nous les considererons comme n'ayant aucune élasticité.

177.

177. L'*action* d'un corps sur un autre, est la maniere dont ce corps agit sur l'autre, & la *réaction* est la maniere dont le corps choqué ou pressé agit sur celui qui le choque ou qui le presse.

178. Tout corps qui agit sur un autre reçoit de cet autre corps une réaction qui est égale à son action. Qu'on presse une pierre avec le doigt, ce doigt sera autant pressé par la pierre que la pierre en est pressée. Si un cheval tire un poids, il est attiré de la même façon par ce poids, c'est-à-dire la force qu'il a d'aller en avant est diminuée d'une quantité égale à la quantité de force qu'il faut pour mouvoir ce corps; & de-là on a tiré cet axiome ou principe: *La réaction est égale & contraire à l'action.*

179. PROPOSITION XVIII. *Si un corps* A *non élastique choque un autre corps* B *qu'il ne peut ébranler, le mouvement du corps* A *cesse totalement après le choc.*

Le corps A choque le corps B avec une force qui est le produit de sa masse par sa vîtesse; or comme il tend toujours à conserver son mouvement, & que le corps B ne lui cede pas; il choque ce corps avec toute sa force, & B réagit de la même façon (*N.* 178.); donc les deux forces étant contraires se détruisent, & comme l'on suppose que A n'a point de force élastique laquelle le feroit rebrousser chemin pour lui faire reprendre la figure qu'il avoit avant le choc, le mouvement doit cesser totalement.

180. PROPOSITION XIX. *Si un corps* A *non élastique choque un autre corps* B *qui est en repos, mais qu'il peut entraîner ou qui va moins vîte selon sa direction, les deux corps après le choc sont en mouvement selon la direction de* A.

Le corps A étant en mouvement tend à se conserver dans cet état; or A en choquant B peut lui donner une partie de sa vîtesse, de sorte qu'il lui en reste pour se mouvoir: donc il n'y a pas de raison pour pouvoir dire que A perdra totalement son mouvement; or puisque A ne communique qu'une partie de sa force à B, le corps B par sa réaction ne détruit dans A que cette partie, & par conséquent il en reste à A pour se mouvoir selon sa premiere direction.

181. COROLLAIRE. De-là il suit que le corps A ne doit donner à B qu'autant de force qu'il en faut pour aller ensemble avec la même vîtesse; car dès-lors que A & B iront également vîte, B n'empêchera point le mouvement de A, & par conséquent il

n'y a pas de raiſon pour pouvoir dire que A dût communiquer à B un plus grand mouvement.

182. PROPOSITION XX. *Si deux corps* A, B *non élaſtiques ſe choquent avec des forces égales & des directions contraires, ils demeurent en repos après le choc.*

Les deux forces étant égales & contraires s'entredétruiſent, & les deux corps n'ayant point de force élaſtique qui les oblige de rebrouſſer chemin pour faire prendre au corps leur premiere figure, le mouvement ceſſe totalement.

183. PROPOSITION XXI. *Si un corps* A *non élaſtique choque un autre corps* B *non élaſtique qui eſt en repos, mais qu'il peut entraîner avec lui, ou qui ſe meut moins vîte dans la même direction, la quantité de mouvement avant le choc eſt égale à la quantité de mouvement après le choc.*

Suppoſons que B ſoit en repos avant le choc, & nommons a la quantité de mouvement du corps A avant le choc, & b la quantité de mouvement que le corps A donne au corps B; donc la quantité de mouvement de A après le choc ſera $a - b$, & celle de B ſera b, & la ſomme de ces deux quantités ſera $a - b + b$, c'eſt-à-dire a, & par conſéquent elle ſera égale à la quantité de mouvement a qui étoit avant le choc.

Suppoſons maintenant que A & B ſoient tous deux en mouvement avant le choc, que la quantité de mouvement de A avant le choc ſoit a, que celle de B ſoit b, & que celle que A donne à B dans l'inſtant du choc ſoit c; donc après le choc la quantité de mouvement de A ſera $a - c$, & celle de B ſera $b + c$, & la ſomme de ces deux quantités ſera $a - c + b + c$, ou $a + b$; or la quantité de mouvement avant le choc eſt auſſi $a + b$; donc les quantités de mouvement ſont égales avant & après le choc.

184. PROPOSITION XXII. *Si deux corps* A, B *non élaſtiques ſe choquent avec des directions contraires & des forces inégales, la différence des quantités de mouvement avant le choc eſt égale à la ſomme des quantités de mouvement après le choc.*

Suppoſons que la quantité de mouvement a de A avant le choc ſoit plus grande que la quantité de mouvement b du corps B; le corps A en choquant B détruira la quantité de mouvement b, laquelle eſt contraire à ſa direction, & produira de plus dans B une quantité de mouvement c ſelon ſa direction; or B par ſa réaction détruira dans a une quantité égale à b & une autre égale

à c; ainsi la quantité de mouvement de A après le choc sera $a - b - c$, & celle de B sera c, & la somme de ces deux quantités sera $a - b - c + c$, c'est-à-dire $a - b$. Or avant le choc, la différence des quantités de mouvement étoit $a - b$; donc la différence des quantités de mouvement avant le choc est égale à la somme des quantités de mouvement après le choc.

185. *Remarque.* Les Cartésiens prétendent que dans cette Proposition, de même que dans la précédente il y a une égale quantité de mouvement avant & après le choc; mais c'est que dans le cas des directions contraires ils ne prennent pour quantité de mouvement que celle qui est selon la direction du corps qui a le plus de force, lorsqu'on en a retranché la quantité de mouvement opposée du corps qui a le moins de force, c'est-à-dire qu'ils nomment quantité de mouvement avant le choc, ce que nous appellons différence de quantités de mouvement; ainsi ils disent la même chose que nous, quoiqu'ils employent des termes qui paroissent directement opposés aux nôtres.

186. PROPOSITION XXIII. *Si un corps* A *non élastique choque un autre corps* B *non élastique qui est en repos, & qu'il peut entraîner, la vîtesse commune après le choc, est égale à la quantité de mouvement de* A *avant le choc, divisée par la somme des masses des deux corps.*

Nommons M la masse de A, m la masse de B, & V la vîtesse de A avant le choc; donc la quantité de mouvement de A avant le choc est MV; or la somme des quantités de mouvement des deux corps après le choc est encore MV (*N.* 183.) & à cause que ces deux corps ont une vîtesse commune après le choc (*N.* 181.) la somme des quantités de mouvement n'est autre chose que la somme de leur masse multipliée par la vîtesse commune; donc si l'on divise la somme MV de leurs quantités de mouvement par la somme $M+m$ de leurs masses, le quotient $\frac{MV}{M+m}$ sera la vîtesse commune après le choc.

187. Si $M=m$, on aura $\frac{MV}{M+m}=\frac{MV}{2m}=\frac{V}{2}$, c'est-à-dire la vîtesse commune après le choc sera la moitié de la vîtesse avant le choc.

Si $m=2M$, on aura $\frac{MV}{M+m}=\frac{MV}{3M}=\frac{V}{3}$, c'est-à-dire la vîtesse commune après le choc sera le tiers de la vîtesse avant le choc, & ainsi des autres.

Au contraire, si $M=2m$, on aura $\frac{MV}{M+m}=\frac{2mV}{3m}=\frac{2V}{3}$, c'est-à-dire la vitesse commune après le choc sera les $\frac{2}{3}$ de la vitesse avant le choc.

Si $M=3m$, on aura $\frac{MV}{M+m}=\frac{3mV}{4m}=\frac{3V}{4}$, c'est-à-dire la vitesse commune après le choc sera les $\frac{3}{4}$ de la vitesse après le choc, & ainsi des autres.

D'où il suit que plus le corps A est grand par rapport à B, plus la vitesse après le choc est grande, quoique toujours moindre que la vitesse avant le choc; & qu'au contraire plus B est grand par rapport à A, plus la vitesse après le choc diminue.

188. PROPOSITION XXIV. *Si un corps* A *non élastique choque un autre corps* B *non élastique qui se meut moins vîte que lui avec la même direction, la vitesse commune après le choc est égale à la somme des quantités de mouvement avant le choc, divisée par la somme des masses.*

Nommant M la masse de A, V sa vitesse, *m* la masse de B & *u* sa vitesse, la quantité de mouvement de A avant le choc sera MV, celle de B sera *mu*, & la somme des deux sera $MV+mu$; or la quantité de mouvement après le choc sera aussi $MV+mu$, (*N.* 183.) & à cause de la vitesse commune après le choc, (*N.* 181.) la somme des quantités de mouvement après le choc n'est autre chose que la somme des masses multipliée par cette vitesse commune; donc si l'on divise la quantité des mouvemens $MV+mu$ après le choc par la somme des masses, le quotient $\frac{MV+mu}{M+m}$ sera la vitesse commune après le choc.

Si l'on suppose $M=2m$ & $V=2u$, on aura $\frac{MV+mu}{M+m}=\frac{2m\times 2u+mu}{3m}$ $=\frac{4mu+mu}{3m}=\frac{5mu}{3m}=\frac{5}{3}u$, c'est-à-dire la vitesse après le choc est égale à $\frac{5}{3}$ de la vitesse de B avant le choc, & par un semblable calcul on trouvera toujours la vitesse après le choc, selon les différens rapports des masses & des vitesses avant le choc.

189. PROPOSITION XXV. *Si un corps* A *non élastique choque un autre corps* B *non élastique qui se meut dans une direction contraire à la sienne, mais avec moins de quantité de mouvement, la vitesse commune après le choc sera égale à la différence des quantités de mouvement avant le choc divisée par la somme des masses.*

Nommant toujours les mêmes quantités de la même façon, nous avons MV pour la quantité de mouvement de A avant le choc, *mu* pour celle de B & MV—*mu* pour la différence de ces quantités de mouvement. Or cette différence est égale à la somme des quantités de mouvement après le choc, (*N.* 184.) & à cause de la vitesse commune après le choc, la somme des quantités de mouvement après le choc est égale à la somme des masses multipliée par la vitesse commune; donc si l'on divise la somme MV—*mu* des quantités de mouvement après le choc par la somme M+*m* des masses, le quotient $\frac{MV-mu}{M+m}$ sera la vitesse commune après le choc.

Si l'on suppose M=2*m* & V=2*u*, on aura $\frac{MV-mu}{M+m}=\frac{2m\times 2u-mu}{3m}=\frac{4mu-mu}{3m}=\frac{3mu}{3m}=u$, c'est-àdire la vitesse après le choc sera égale à la vitesse de B avant le choc.

De même, si l'on suppose M=*m* & V=2*u*, on aura $\frac{MV-mu}{M+m}=\frac{2Mu-Mu}{2M}=\frac{Mu}{2M}=\frac{u}{2}$, c'est-à-dire la vitesse commune après le choc est égale à la moitié de la vitesse de B avant le choc; & par un semblable calcul, on trouvera toujours la vitesse commune après le choc, selon les différens rapports de masses & des vitesses avant le choc.

190. Les trois formules de la vitesse commune après le choc, sont donc $\frac{MV}{M+m}$ lorsque le corps B est en repos avant le choc; $\frac{MV+mu}{M+m}$ lorsque le corps B se meut avant le choc selon la direction de A, mais moins vîte, & $\frac{MV-mu}{M+m}$ lorsque le corps B se meut avec une direction contraire à celle de A, mais avec moins de force; & il faut faire attention à ces trois formules, parce qu'elles nous serviront dans ce que nous devons dire touchant le choc des corps à ressort.

191. PROPOSITION XXVI. *Si un corps non élastique* A *choque un autre corps non élastique* B *qui est en repos, il le choque avec toute sa vitesse; si le corps* B *se meut selon la direction de* A, *mais moins vîte, le corps* A *le choque avec la différence des vitesses, & si le*

corps B *se meut dans une direction contraire à celle de* A, *le corps* A *le choque avec la somme des vitesses.*

La premiere partie de cette Proposition est évidente par elle-même, la seconde ne l'est guéres moins; car le corps A mû avec la même vitesse B, n'atteindroit jamais B, puisque les deux corps ne feroient pas plus de chemin l'un que l'autre dans le même tems, & par conséquent A n'atteint & ne choque B que par l'excès de sa vitesse sur celle de B; enfin la troisiéme partie se prouvera aisément, en faisant voir que lorsque A choque B qui s'approche vers lui, la quantité de mouvement qu'il perd est égale à celle qu'il perdroit s'il alloit choquer le corps B en repos avec une vitesse égale à la somme des vitesses. En effet:

Lorsque A & B se meuvent ensemble, la quantité de mouvement de A avant le choc est MV, celle de B est mu, & la vitesse commune après le choc est $\frac{MV - mu}{M + m}$ (*N.* 189.) donc la quantité de mouvement de A après le choc est $\frac{MMV - Mmu}{M + m}$; or sa quantité de mouvement avant le choc étoit MV; donc ce qu'il a perdu par le choc est $MV - \frac{MMV + Mmu}{M + m}$, ou $\frac{MMV + MmV - MMV + Mmu}{M + m}$, ce qui se réduit à $\frac{MmV + Mmu}{M + m}$.

Supposons maintenant que A se meuve avec la vitesse $V + u$, & que B soit en repos, la quantité de mouvement de A avant le choc sera $MV + Mu$, & la somme des quantités de mouvement après le choc sera aussi $MV + Mu$; ainsi la vitesse commune après le choc sera $\frac{MV + Mu}{M + m}$, & la quantité de mouvement de A après le choc sera $\frac{MMV + MMu}{M + m}$; donc ce qu'il aura perdu par le choc sera $MV + Mu - \frac{MMV - MMu}{M + m}$, ou $\frac{MMV + MmV + MMu + Mmu - MMV - MMu}{M + m}$, ce qui se réduit à $\frac{MmV + Mmu}{M + m}$; or cette perte est égale à la précédente. Donc, puisque le corps A perd la même chose de l'une ou de l'autre façon, il choque le corps B en mouvement, de même qu'il le choqueroit avec la vitesse $V + u$, si B étoit en repos.

192. PROPOSITION XXVII. *La force élastique d'un corps est égale à la force qui le comprime ou qui le tend sans le rompre.*

Puisque le corps est comprimé ou tendu sans être brisé, il résiste donc avec une force égale à celle qui le comprime ou qui le tend. Or il ne résiste que par la force élastique. Donc la force élastique est égale à la force qui comprime ou qui tend le corps.

193. **Probleme.** *Connoissant la vitesse d'un corps élastique* A *qui choque un autre corps élastique* B *qui est en repos, connoître les vitesses après le choc.*

Si les deux corps n'étoient pas élastiques, la vitesse commune après le choc seroit $\frac{MV}{M+m}$ (*N.* 186.); or dans l'instant du choc les ressorts sont comprimés avec la vitesse V du choc, & les résistances de ces ressorts sont égales, puisque l'un ne peut surmonter l'autre; donc il faut que la vitesse V se distribue aux deux ressorts réciproquement à leurs masses; c'est-à-dire qu'en nommant x la partie de la vitesse V que le ressort de B reçoit, ou avec laquelle ce ressort résiste au ressort de A, & $V-x$ la partie de la vitesse V avec laquelle le ressort de A résiste au ressort de B, il faut que la force Bx ou mx soit égale à la force $AV-Ax$ ou $MV-Mx$, & que par conséquent à cause de $mx=MV-Mx$ on ait $x. V-x :: M. m.$

Or puisque $mx=MV-Mx$, nous aurons $mx+Mx=MV$, & partant $x=\frac{MV}{M+m}$; ainsi la vitesse que le ressort de B reçoit est $\frac{MV}{M+m}$; or ce ressort ne pouvant pas se détendre du côté de A dont le ressort lui résiste avec la même force, il faut nécessairement qu'il pousse B de l'autre côté, & que par conséquent il donne à B la vitesse $\frac{MV}{M+m}$; mais indépendamment du ressort, la vitesse de B après le choc est aussi $\frac{MV}{M+m}$; donc la vitesse totale du corps élastique après le choc est $\frac{2MV}{M+m}$.

Maintenant puisque $x=\frac{MV}{M+m}$, nous aurons $V-x=V-\frac{MV}{M+m}$ $=\frac{MV+mV-MV}{M+m}=\frac{mV}{M+m}$; or $V-x$ est la vitesse que le ressort de A reçoit dans l'instant du choc; donc le ressort de A agit avec la vitesse $\frac{mV}{M+m}$. Or ce ressort ne peut se détendre du côté de B

dont le reſſort lui réſiſte avec la même force; donc il faut qu'il repouſſe A dans une direction contraire avec la viteſſe $\frac{mV}{M+m}$; mais indépendamment de cette viteſſe, la viteſſe de A après le choc eſt $\frac{MV}{M+m}$; donc à cauſe de la viteſſe contraire $\frac{mV}{M+m}$ la viteſſe du corps élaſtique A eſt $\frac{MV-mV}{M+m}$.

194. Si l'on ſuppoſe $M=m$, la viteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{2MV}{2M}=V$, & la viteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ de A ſera $\frac{MV-MV}{M+m}=o$, c'eſt-à-dire que ſi le corps A eſt égal à B, le corps A eſt en repos après le choc, & B ſe meut avec la viteſſe de A avant le choc.

195. Si l'on ſuppoſe $M=2m$, la viteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{4mV}{3m}=\frac{4V}{3}$, & la viteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ de A ſera $\frac{2mV-mV}{3m}$ $=\frac{mV}{3m}=\frac{1}{3}V$.

De même ſi l'on ſuppoſe $M=3m$, la viteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{6mV}{4m}=\frac{6}{4}V$, & la viteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ ſera $\frac{3mV-mV}{4m}$ $=\frac{2mV}{4m}=\frac{2}{4}V$, & ainſi des autres.

C'eſt-à-dire que lorſque A eſt plus grand que B, les deux corps après le choc ſuivent la direction de A avant le choc, & que la ſomme de leur viteſſe eſt plus grande que la viteſſe de A avant le choc.

196. Au contraire, ſi l'on ſuppoſe $m=2M$, la viteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{2MV}{3M}=\frac{2}{3}V$, & la viteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ de A, ſera $\frac{MV-2MV}{M+m}=\frac{-MV}{3M}=-\frac{1}{3}V$, & par conſéquent à cauſe du ſigne — le corps A rebrouſſera ſon chemin avec $\frac{1}{3}V$.

De même ſi l'on ſuppoſe $m=3M$, la viteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{2MV}{M+3M}=\frac{2MV}{4M}=\frac{2}{4}V$, & la viteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ de A, ſera

sera $\frac{MV-3MV}{4M} = \frac{-2MV}{4M} = -\frac{2}{4}V$, & par conséquent le corps A rebroussera son chemin avec $\frac{2}{4}V$, & ainsi des autres, c'est-à-dire que si A est moindre que B, le corps A retourne toujours en arriére, & la somme des vitesses après le choc, prise chacune selon leurs directions, est égale à la vitesse de A avant le choc.

197. PROBLEME. *Connoissant les vitesses de deux corps élastiques A, B qui se meuvent dans la même direction, mais dont le second B, a moins de vitesse, connoître les vitesses après le choc.*

Si les deux corps n'étoient pas élastiques, leur vitesse commune après le choc seroit $\frac{MV+mu}{M+m}$ (*N.* 190.); or, la vitesse avec laquelle A choque B est $V-u$ (*N.* 191.), & cette vitesse doit se distribuer aux deux ressorts réciproquement aux masses par les raisons que nous avons dites dans le Problême précédent; nommant donc x la partie de cette vitesse que le ressort de B reçoit, & $V-u-x$ celle que le ressort de A reçoit, nous aurons $x. V-u-x :: M. m$; donc $mx = MV - Mu - Mx$ ou $Mx+mx = MV-Mu$, d'où je tire $x = \frac{MV-Mu}{M+m}$; ainsi la vitesse que le ressort de B reçoit, est $\frac{MV-Mu}{M+m}$; or, ce ressort ne peut pas se détendre du côté de A dont le ressort lui resiste avec la même force; donc il faut qu'il pousse B de l'autre côté avec la vitesse $\frac{MV-Mu}{M+m}$; mais indépendamment du ressort, B est déja poussé de ce côté avec la vitesse $\frac{MV+mu}{M+m}$; donc la vitesse totale de B après le choc est $\frac{MV+mu+MV-Mu}{M+m}$, ce qui se reduit à $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$.

Maintenant puisque $x = \frac{MV-Mu}{M+m}$, donc $V-u-x = V-u - \frac{MV+Mu}{M+m} = \frac{MV-Mu+mV-mu-MV+Mu}{M+m} = \frac{mV-mu}{M+m}$; or, $V-u-x$ est la vitesse que le ressort de A reçoit, donc cette vitesse est $\frac{mV-mu}{M+m}$. Mais ce ressort ne peut se détendre du côté de B dont le ressort lui resiste avec la même force, donc il faut qu'il

repousse A dans une direction contraire à celle qu'il avoit avec la vitesse $\frac{mV - mu}{M + m}$; or, indépendamment du ressort le corps A après le choc a la vitesse $\frac{MV + mu}{M + m}$; retranchant donc de celle-ci celle que le ressort lui donne dans un sens contraire, la vitesse de A après le choc sera $\frac{MV + mu - mV + mu}{M + m}$, ce qui se reduit à $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$.

198. Si l'on suppose $M = m$ la vitesse $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$ de B après le choc, sera $\frac{2MV}{2M} = V$, & la vitesse $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ sera $\frac{2mu}{2m} = u$, c'est-à-dire que les deux corps après le choc auront échangé leurs vitesses avant le choc.

De même si l'on suppose $M = 2m$, la vitesse $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$ de B après le choc sera $\frac{4mV - 2mu + mu}{3m} = \frac{4mV - mu}{3m} = \frac{4}{3}V - \frac{1}{3}u$, & la vitesse $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ de A sera $\frac{2mV - mV + 2mu}{3m} = \frac{mV + 2mu}{3m} = \frac{1}{3}V + \frac{2}{3}u$, & par un semblable calcul on trouvera les vitesses de A & de B après le choc, selon les différens rapports de M à m, soit que A suive la même direction, soit qu'il soit obligé de rebrousser chemin, ce que l'on connoîtra lorsque la valeur de sa vitesse après le choc sera négative.

199. PROBLEME. *Connoissant les vitesses de deux corps élastiques* A, B *qui s'avancent l'un vers l'autre avec des directions contraires; mais dont le second* B *a moins de quantité de mouvement que le premier, connoître leurs vitesses après le choc.*

Si les deux corps n'étoient pas élastiques, leur vitesse commune après le choc seroit $\frac{MV - mu}{M + m}$ (*N.* 190.); or A choque B avec la somme $V + u$ des vitesses avant le choc (*N.* 191.), & cette vitesse se distribue aux deux ressorts réciproquement à leurs masses; nommant donc x la portion de cette vitesse que le ressort de B reçoit, & $V + u - x$, la portion que reçoit le ressort de A, nous aurons $x.\ V + u - x :: M.\ m$; donc $xm = MV + Mu - Mx$

ou $Mx+mx=MV+Mu$, d'où je tire $x=\frac{MV+Mu}{M+m}$, ainsi le ressort de B reçoit la vitesse $\frac{MV+Mu}{M+m}$; mais ce ressort ne pouvant se détendre du côté de A dont le ressort lui resiste avec la même force, il faut nécessairement qu'il pousse B de l'autre côté de A, avec la vitesse $\frac{MV+Mu}{M+m}$; or, B indépendamment du ressort a reçû par le choc de A la vitesse $\frac{MV-mu}{M+m}$; donc la vitesse de B après le choc est $\frac{MV-mu+MV+Mu}{M+m}$; ce qui se qui réduit à $\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$.

Maintenant à cause de $x=\frac{MV+Mu}{M+m}$, nous aurons $V+u-x$ $=V+u-\frac{MV-Mu}{M+m}=\frac{MV+Mu+mV+mu-MV-Mu}{M+m}=\frac{mV+mu}{M+m}$; or, $V+u-x$ est la vitesse que reçoit le ressort de A, donc cette vitesse est $\frac{mV+mu}{M+m}$, mais ce ressort ne peut se détendre du côté de B dont le ressort lui resiste; donc il faut qu'il repousse A dans une direction contraire avec la vitesse $\frac{mV+mu}{M+m}$. Mais indépendamment du ressort le corps A après le choc doit avoir la vitesse $\frac{MV-mu}{M+m}$ selon sa direction; retranchant donc de cette vitesse la vitesse opposée que le ressort lui donne, sa vitesse après le choc sera $\frac{MV-mu-mV-mu}{M+m}=\frac{MV-mV-2mu}{M+m}$.

200. Si l'on suppose $M=m$, la vitesse $\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$ de B après le choc sera $\frac{2MV}{M+m}=V$, & la vitesse $\frac{MV-mV-2mu}{M+m}$, de A sera $-\frac{2mu}{2m}=-u$, c'est-à-dire A rebroussera son chemin avec la vitesse de B avant le choc, & B suivra la direction de A avec la vitesse de A avant le choc, ainsi ils rebrousseront tous les deux leur chemin en faisant échange de leur vitesse. Et par un semblable calcul on trouvera toujours les vitesses après le choc selon les differens rapports de M à m, en observant cependant que si l'on veut supposer que m soit plus grand que M, il faut que cette supposition soit telle que la quantité de mouvement mu de B avant le

choc ſoit moindre que la quantité de mouvement MV de A avant le choc, ſelon l'énoncé du Problême.

201. PROPOSITION XXVIII. *Si deux corps* A, B *d'égales maſſes ſe choquent avec des viteſſes égales & directement oppoſées. Après le choc ils rebrouſſeront leurs chemins chacun avec ſa viteſſe.*

Si les deux corps n'étoient pas élaſtiques, leur mouvement ceſſeroit après le choc (*N.* 182.), puiſqu'on ſuppoſe que leurs forces ſont egales. Or, le choc ſe faiſant avec la ſomme V+V des viteſſes (*N.* 191.), cette ſomme ſera 2V, & comme 2V doit ſe diſtribuer aux deux reſſorts réciproquement aux maſſes que l'on ſuppoſe égales, chaque reſſort recevra la viteſſe V; or le reſſort de A ne pouvant ſe détendre du côté de B, donc le reſſort lui reſiſte avec la même force, repouſſera A de l'autre côté avec la viteſſe V, & par la même raiſon le reſſort de B repouſſera B du côté oppoſé à A avec la viteſſe V; donc ces deux corps rebrouſſeront leur chemin avec les viteſſes qu'ils avoient avant le choc.

203. PROPOSITION XXIX. *Si un corps élaſtique* A *choque un autre corps élaſtique* B *qui lui reſiſte invinciblement, le corps* A *après le choc rebrouſſe ſon chemin avec la même viteſſe qu'il avoit auparavant.*

Si A & B n'étoient pas élaſtiques, le mouvement de A ceſſeroit après le choc (*N.* 179.); or, la reſiſtance que le corps B oppoſe au corps A étant égale à la force du corps A qui eſt MV, nous pouvons regarder les deux corps A, B comme deux corps qui ont des maſſes égales, mais dont l'un eſt retenu par un obſtacle invincible; ainſi le choc ſe faiſant avec la viteſſe V, & cette viteſſe ſe diſtribuant aux deux reſſorts réciproquement à leurs maſſes, chaque reſſort doit recevoir $\frac{1}{2}$V de viteſſe. Or, le reſſort de A ne pouvant ſe détendre du côté de B, repouſſe A du côté oppoſé avec $\frac{1}{2}$V, & dans le même tems le reſſort de B qui ne peut abſolument ſe détendre du côté de B, repouſſe le corps A avec $\frac{1}{2}$V; donc le corps A repouſſé avec $\frac{1}{2}V+\frac{1}{2}V=V$ doit rebrouſſer chemin avec la viteſſe qu'il avoit auparavant, ou bien on peut dire que les deux reſſorts trouvant ici une reſiſtance invincible du côté de B, & n'en trouvant point du côté de A, ils doivent porter leur effort pour ſe détendre de ce côté-là, & par conſéquent repouſſer le corps A avec $\frac{1}{2}V+\frac{1}{2}V=V$.

204. PROPOSITION XXX. *Si deux corps* A, B *qui ſe choquent, ſuivent la même direction avant & après le choc, la quantité de mouvement avant le choc, eſt égale à la quantité de mouvement après le choc.*

S'ils ont des directions contraires avant & après le choc ; la différence des quantités de mouvement est la même avant & après le choc.

S'ils ont des directions contraires avant le choc, & la même direction après le choc, la somme des quantités de mouvement après le choc est égale à la difference des quantités de mouvement avant le choc.

Enfin, s'ils ont la même direction avant le choc, & des directions contraires après le choc, la difference des quantités de mouvement après le choc, est égale à la somme des quantités de mouvement avant le choc.

Dans le premier cas, la somme des quantités de mouvement avant le choc est $MV + mu$, la vitesse de A après le choc est $\frac{MV - mV + 2mu}{M+m}$ (*N.* 197.) ; donc sa quantité de mouvement est $\frac{MMV - MmV + 2Mmu}{M+m}$. De même la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV - Mu + mu}{M+m}$, & sa quantité de mouvement est $\frac{2mMV - mMV + mmu}{M+m}$; ajoutant donc ensemble les deux quantités de mouvement de A, & B après le choc, la somme sera $\frac{MMV - MmV + 2Mmu + 2mMV - mMV + mmu}{M+m}$ $= \frac{MMV + mMV + Mmu + mmu}{M+m} = MV + mu$, or, $MV + mu$ est la quantité de mouvement avant le choc, donc les quantités de mouvement sont égales avant & après le choc.

Dans le second cas, la différence des quantités de mouvement avant le choc est $MV - mu$; or, le corps A rebrousse chemin après le choc, donc sa vitesse après le choc, laquelle est $\frac{MV - mV - 2mu}{M+m}$ (*N.* 199.) devient negative, & par conséquent elle est $- \frac{MV + mV + 2mu}{M+m}$, & sa quantité de mouvement est $- \frac{MMV + MmV + 2Mmu}{M+m}$, la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV + Mu - mu}{M+m}$; & sa quantité de mouvement est $\frac{2mMV + mMu - mmu}{M+m}$; retranchant donc la quantité de mouvement de A après le choc de la quantité de mouvement de B après le choc, leur différence sera $\frac{2mMV + mMu - mmu + MMV - MmV - 2Mmu}{M+m} = \frac{MMV + mMV - mMu - mmu}{M+m}$ $= MV - mu$; or, cette différence est la même que la différence $MV - mu$ des quantités de mouvement avant le choc. Donc, &c.

Et par des calculs ſemblables on trouvera aiſément la vérité des deux autres cas.

205. *Remarque*. Il n'y a donc pas toujours la même quantité de mouvement avant & après le choc, & par conſéquent il ſemble que les Cartéſiens ont tort, lorſqu'ils nous aſſurent le contraire ; mais il faut prendre garde qu'ils ne prennent pour quantité de mouvement que celle qui reſte, ſelon la direction du corps A qui avoit la plus grande quantité de mouvement avant le choc lorſqu'on en a retranché la quantité de mouvement qui lui eſt oppoſée. Ainſi ils appellent quantité de mouvement, ce que nous appellons différence de ces quantités, & par conſéquent ils diſent la même choſe que nous. Au reſte, leur façon de s'exprimer & de conſidérer les choſes, eſt quelquefois utile.

206. Proposition XXXI. *Dans le choc de deux corps élaſtiques, la ſomme des produits des maſſes par les quarrés de leurs viteſſes avant le choc, eſt égale à la ſomme des produits des maſſes par les quarrés de leurs viteſſes après le choc.*

Si les corps A & B ont la même direction avant & après le choc, la viteſſe de A après le choc eſt $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ (*N.* 197.), donc ſon quarré eſt $\frac{M^2V^2 - 2MmVV + m^2V^2 + 4mMVu - 4mmVu + 4m^2u^2}{M^2 + 2mM + mm}$; & multipliant ce quarré par ſa maſſe, nous aurons $\frac{M^3V^2 - 2M^2mVV + Mm^2V^2 + 4M^2mVu - 4Mm^2Vu + 4Mm^2u^2}{M^2 + 2mM + mm}$. De même la viteſſe de B, après le choc, eſt $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$ (*N.* 197.) ; & ſon quarré multiplié par la maſſe m, eſt $\frac{4M^2V^2m - 4M^2Vum + M^2u^2m + 4MmmVu - 2Mmmuu + m^3u^2}{M^2 + 2Mm + mm}$; ajoutant donc enſemble ces deux quarrés des viteſſes après le choc, multipliés par leurs maſſes, nous aurons $\frac{M^3V^2 + 2M^2mV^2 + Mm^2V^2 + M^2u^2m + 2Mm^2u^2 + m^3u^2}{M^2 + 2Mm + mm} = MV^2 + mu^2$; or, $MV^2 + mu^2$ eſt égal à la ſomme des quarrés des viteſſes avant le choc multipliés par les maſſes ; donc cette ſomme eſt égale à celle des quarrés des viteſſes après le choc multipliés par les maſſes.

Et on prouvera la même choſe dans tous les autres cas, en obſervant que ſi dans quelqu'un de ces cas, le corps A rebrouſſe ſon chemin après le choc, ſa viteſſe après le choc devient néga-

tive, & que par conséquent il faut rendre son expression négative en changeant les signes + & — avant de faire son quarré.

Cette Proposition est encore vraye, lorsque l'un des corps B est en repos avant le mouvement. Ce qu'il est facile de vérifier.

207. *Remarque.* Les partisans des forces *vives* ont pris d'ici occasion de soutenir que les forces des corps à ressort qui se choquent, sont entr'elles comme les quarrés des vitesses multipliées par les masses; car, disent-ils, les forces sont entr'elles comme les effets qu'elles produisent; or, dans le choc des corps les effets sont que les produits des masses par les quarrés des vitesses avant le choc, sont égaux aux produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc; donc les forces après le choc doivent être aussi égales aux forces avant le choc, & par conséquent elles doivent être dans la raison des produits des masses par les quarrés des vitesses. Mais il faut prendre garde que cet effet ne vient pas entierement de la force motrice des corps; car si cela étoit, la même chose devroit arriver dans le choc des corps non élastiques; ce qui n'est pas vrai, & que par conséquent il est causé en partie par la force motrice, & en partie par la force du ressort, laquelle ne provient nullement de la force motrice. Ainsi cette proprieté du choc des corps à ressort ne fait rien en faveur des forces vives.

208. Proposition XXXII. *Si un corps élastique* A (Fig. 52.) *choque un autre corps* B *élastique* B *plus grand que lui & qui est en repos, & que celui-ci par le mouvement que le choc lui a donné aille choquer un autre corps élastique* C *plus grand que lui, & qui est en repos, la vitesse que le corps* C *recevra par le choc de* B *sera plus grande que celle qu'il auroit reçû, si* A *l'avoit choqué avec la même vitesse dont il a choqué* B; *& la même chose arriveroit si* B *étoit moindre que* A *&* C, *moindre que* B.

Je nomme L la vitesse de A; S, la vitesse que B reçoit par le choc de A; R la vitesse que C reçoit par le choc de B, & T la vitesse que C recevroit si A le choquoit immédiatement. La vitesse que A communique à B est $\frac{2AL}{A+B}$, c'est-à-dire, le double de la quantité de mouvement de A divisé par la somme des masses A, B (*N.* 193.); donc $\frac{2AL}{A+B} = S$, & partant $2AL = S \times \overline{A+B}$; d'où je tire $2L. S :: A+B. A$; de même la vitesse que B donne au corps C est $\frac{2BS}{B+C}$, & par conséquent $\frac{2BS}{B+C} = R$, ou $2BS = R \times$

$\overline{B+C}$; d'où je tire S. R :: B+C. 2B; or, 2L est à R en raison composée de la raison de 2L à S, & de celle de S à R; donc 2L est à R en raison composée de la raison A+B. A, & de la raison B+C, 2B, c'est-à-dire 2L. R :: $\overline{A+B}\times\overline{B+C}$. A×2B.

De même la vitesse que A donneroit à C s'il le choquoit immédiatement, est $\frac{2AL}{A+C}$, donc $\frac{2AL}{A+C}$=T, ou 2AL=T×$\overline{A+C}$, d'où je tire 2L. T :: A+C. A. Il est donc question de faire voir que 2L est moins grand par rapport à R, que par rapport à T, & que par conséquent R est plus grand que T, ce que je fais ainsi:

Je prens trois lignes MN, NP, PQ qui soient entr'elles comme les masses A, B, C, & par conséquent j'ai MN+NP, ou MP. MN :: A+B. A; donc 2L. S :: MP. MN; de même j'ai NP+PQ ou NQ. 2NP :: B+C. 2B, donc S. R :: NQ. 2NP; & à cause que 2L est à R en raison composée de la raison de 2L à S, & de celle de S à R ou de la raison MP. MN, & de la raison NQ. 2NP, nous avons 2L. R :: MP×NQ. MN×2NP.

J'éleve en N la perpendiculaire ND que je fais égale à MP, & j'acheve le rectangle DEQN qui est égal à MP×NQ; je prens sur DH la partie HN=NP, & par conséquent DH=MN. Du point H, je mene HY paralelle à NQ, & du point P la droite PZ paralelle à ND, & le rectangle HDZX est égal à MN×NP, ainsi nous avons 2L. R :: NDEQ. 2HDZX.

De même MN+PQ. MN :: A+C. A, & multipliant les deux premiers termes par la hauteur commune NP, j'ai MN×NP +PQ×NP. MN×NP :: A+C. A; or, nous avons 2L. T :: A+C. A, donc 2L. T :: MN×NP+PQ×NP. MN×NP; mais MN×NP =HDZX, & PQ×NP=PQYX; donc 2L. T :: HDZX +PQYX. HDZX, ou bien en doublant les deux derniers termes 2L. T :: 2HDZX+2PQYX. 2HDZX.

Or, 2HDZX+2PQYX est plus grand que NDEQ, car faisant HV=DH, & menant du point V la droite VG paralelle à NQ le rectangle PIGQ sera plus grand que le rectangle PIVN, à cause de PQ plus grand que NP; donc 2HDZX ne sera moindre que NDZP que de la quantité NVIP, & au contraire 2PQYX sera plus grand que PZEQ de toute la quantité PIGQ plus grande que NVIP; donc 2HDZX+2PQYX sera plus grand que NDEQ, & par conséquent 2HDZX+2PQVX sera plus grand par rapport à 2HDZX, que NDEQ par rapport au même 2HDZX;

2HDZX ; donc auſſi 2L ſera plus grand par rapport à T que 2L par rapport à R, & partant la viteſſe R ſera plus grande que la viteſſe T.

On démontreroit la même choſe de la même façon, ſi B étoit moindre que A, & C moindre que B.

209. Il ſuit de-là que ſi on mettoit pluſieurs corps entre A & C, enſorte qu'ils allaſſent tous en augmentant ou en diminuant depuis A juſqu'à C, on pourroit augmenter conſidérablement la viteſſe de C.

210. Lemme. *Trois lignes* AB, AC, AD (Fig. 53.) *étant en proportion Géométrique continue, ſi on leur ajoute à chacune une même quantité* AE. *Je dis que le rectangle* EB×ED *des extrêmes* EB, ED *eſt plus grand que le quarré de la moyenne* EC.

Je fais le quarré EFGC de la moyenne EC, & le rectangle ELMD des extrêmes EB, ED; or, par la ſuppoſition les trois lignes AB, AC, AD étant en proportion continue, le quarré de AC ſera égal au rectangle AB×AD, retranchant donc du quarré EFGC, le quarré AHSC de la droite AC, & du rectangle ELMD le rectangle APQD égal au rectangle AB×AD, il reſtera d'une part le gnomon EFGSHA, & de l'autre le gnomon ELMQPA.

Or, à cauſe de EL=EB, & de AB=AP ou ET, nous avons TL=EA, de même à cauſe EF=EC, & de AH ou ER=AC, nous avons RF=EA, & par conſéquent RF=TL; donc prenant LX=FG, & du point X menant VX paralelle à TL, le rectangle RFGS ſera égal au rectangle TLVX; ainſi retranchant du gnomon EFGSHA le rectangle RFGS, & du gnomon ELMQPA le rectangle TLVX, il reſtera d'une part le rectangle RHAE, & de l'autre le rectangle EATP plus le rectangle VXQM.

Je fais AZ=AP, & menant ZY paralelle à EA, j'ai le rectangle YZAE égal au rectangle EAPT; retranchant donc du rectangle RHAE le rectangle YZAE & des deux EATP+VXQM le rectangle EATP, il reſtera d'une part RHZY, & de l'autre VXMQ; or, ces deux rectangles reſtans ayant une dimenſion égale RH=VX, ſont entr'eux comme HZ eſt à VQ, & par conſéquent ſi je fais voir que HZ eſt moindre que VQ, j'aurai démontré que le rectangle RHZY eſt moindre que le rectangle VXMQ, & que EFGC & moindre que ELMD.

Or, à cauſe de AH=AC, & de AZ=AP ou AB, j'ai ZH =BC, & de l'autre côté j'ai VQ=CD, mais à cauſe des trois

lignes AD, AC, AB en proportion j'ai AD — AC. AC :: AC — AB. AB ou CD. AC :: CB. AB ou CD. CB :: AC. AB; mais AC est plus grand que AB; donc CD ou VQ est plus grand que CB ou ZH, & partant VQMX est plus grand que HZYR, d'où il est aisé de conclure que le quarré EFGC, est moindre que le rectangle ELMD, puisqu'après avoir retranché de choses égales de part & d'autre, le reste HZYR est moindre que le reste XMQV.

211. PROPOSITION XXXIII. *Si trois corps élastiques* A, B, C (Fig. 54.) *sont en proportion Géométrique continue qui aille en augmentant ou en diminuant, & que* A *ayant choqué* B *qui étoit en repos, celui-ci aille choquer* C *qui est aussi en repos. Je dis que la vitesse que* C *reçoit de* B *est plus grande que celle qu'il pourroit recevoir, si au lieu de* B *on mettoit un autre corps* H *plus grand ou moindre que* B, *qui après avoir été choqué par* A *vint le choquer.*

Je nomme L la vitesse de A; S la vitesse que B reçoit de A, & R la vitesse que C reçoit de B. Je prens trois lignes MN, NP, PQ qui soient entr'elles comme les trois corps A, B, C, & suivant ce qui a été dit dans le Problême précédent, nous aurons 2L est à R en raison composée de la raison MP, MN, & de la raison NQ, 2NP; or, à cause de PQ. NP :: NP. MN, nous avons PQ+NP. NP :: NP+MN. MN ou NQ. NP :: MP. MN, & doublant les conséquens, nous aurons NQ. 2NP :: MP. 2MN; donc puisque 2L est à R en raison composée de la raison MP, MN, & de la raison NQ, 2NP, qui est la même que la raison MP, 2MN, nous avons 2L est à R en raison composée de la raison MP, MN & de la raison MP, 2MN, & par conséquent $2L. R :: \overline{MP}^2. 2\overline{MN}^2$.

Maintenant mettons à la place de B un autre corps X plus grand que B, & nommons H la vitesse que ce corps en repos recevra de A, & Z celle que le corps X donnera au corps C; je prens une ligne NF qui soit à MN, comme X est à A, & ensuite une troisiéme proportionnelle NV à NF & NP. Cela fait:

La vitesse que A donnera à X sera $\frac{2AL}{A+X}$ (*N.* 193.); donc $\frac{2AL}{A+X} = H$ ou $2AL = H \times \overline{A+X}$, d'où je tire 2L. H :: A + X. A; mais nous avons A. X :: MN. NF, donc A + X. A. MN + NF. MN :: MF. MN, & par conséquent 2L. H :: MF. MN.

La viteſſe que X donne à C eſt $\frac{2HX}{X+C}$, donc $\frac{2HX}{X+C} = Z$, & $2HX = Z \times \overline{X+C}$, d'où je tire H. Z :: X + C. 2X; mais à cauſe que nous avons A. X :: MN. NF ou A. MN :: X. NF, & A. C :: MN. PQ ou A. MN. C. PQ, nous aurons auſſi X. NF :: C. PQ ou X. C :: NF. PQ, & partant X + C. X :: NF + PQ. NF, & doublant les conſéquens X + C. 2X :: NF + PQ. 2NF; donc H. Z :: NF + PQ. 2NF.

Or, 2L eſt à Z en raiſon compoſée de la raiſon de 2L à H, & de celle de H à Z, donc 2L eſt à Z en raiſon compoſée de la raiſon MF, MN, & de la raiſon NF + PQ, 2NF.

Mais les trois lignes MN. NP. PQ étant en proportion continue, nous avons $MN \times PQ = \overline{NP}^2$, & à cauſe des trois lignes en proportion continue NV, NP, NF, nous avons $NV \times NF = \overline{NP}^2$, donc $MN \times PQ = NV \times NF$, d'où je tire NV. MN :: PQ. NF, & compoſant, j'ai NV + MN ou MV. MN :: PQ + NF. NF, & doublant les conſéquens, nous aurons MV. 2MN :: PQ + NF. 2NF. Donc puiſque nous venons de trouver que 2L eſt à Z en raiſon compoſée de MF, MN & de NF + PQ, 2NF; il s'enſuit que 2L eſt à Z en raiſon compoſée de MF, MN, & de MV. 2MN, & par conſéquent 2L. Z :: $MF \times MV$. $2\overline{MN}^2$, & $2L \times 2\overline{MN}^2 = Z \times MF \times MV$; mais nous avons trouvé 2L. R :: $\overline{MP}^2$. $2\overline{MN}^2$, ce qui donne $2L \times 2\overline{MN}^2 = R \times \overline{MP}^2$; donc $Z \times MF \times MV = R \times \overline{MP}^2$, d'où je tire Z. R :: $\overline{MP}^2$. $MF \times MV$; or, à cauſe des trois lignes en proportion continue NV, NP, NF, & de la droite MN ajoutée à chacune d'elles, nous avons $\overline{MP}^2$ plus petit que $MF \times MV$ par le Lemme précédent; donc la viteſſe Z que le corps X donneroit au corps C, eſt moindre que celle que le corps C reçoit de B.

On prouveroit la même choſe, ſi au lieu de B on mettoit un autre corps plus petit que B.

Du Choc oblique des Corps.

212. Deux corps ſe choquent directement lorſque leurs directions paſſent par leurs centres. Par exemple, ſi le corps A (*Fig. 55.*) avance vers B le long de la ligne AB qui paſſe par les deux cen-

tres de A & B, ils se choquent directement. Tout ce que nous avons dit ci-dessus touchant le choc des corps, doit s'entendre de ce choc direct.

213. Deux corps se choquent obliquement, lorsque leurs directions ne passent pas par leurs centres. Par exemple, si le corps A (*Fig.* 56.) se meut vers le corps C, selon la ligne AD qui ne passe pas par le centre C, le choc sera oblique; de même si les deux corps A, B (*Fig.* 57.) se meuvent selon les directions AD, BD qui ne passent pas toutes les deux par les deux centres, le choc de ces corps, lorsqu'ils se rencontreront, sera oblique.

214. Lorsque les corps sont sphériques, l'obliquité du choc se mesure par l'angle que fait la direction avec la tangente au point où se fait le choc. Par exemple, supposons que le corps sphérique A (*Fig.* 56.) aille choquer le corps sphérique B selon la direction AD qui ne passe pas par le centre C, & que le choc se fasse au point R, je mene par le point R une tangente, ou plutôt un plan touchant MS, & l'angle que la direction AR fait avec ce plan, est la mesure de l'obliquité du choc.

215. Probleme. *Déterminer ce qui arrive dans le choc oblique des corps non élastiques.*

En premier lieu, si le corps A (*Fig.* 58.) va choquer le corps oblique B qu'il ne peut ébranler. Je conçois un plan touchant au point R où se fait le choc; la direction AC étant oblique à ce plan, j'abaisse du point A la perpendiculaire AR, & achevant le paralellogramme ARCH, la force AC est composée de la force AR, & de la force AH; or, la force AR choque le plan directement, & par conséquent la sphére B aussi, mais la force AH ne le choque point, puisqu'elle est paralelle à RC; donc après le choc la force AR sera détruite, & il ne restera plus que la force AH; donc le corps A après le choc continuera à se mouvoir avec la force AH, selon la direction CD paralelle à AH.

En second lieu, si les corps A, B (*Fig.* 59.) se choquent avec des directions MA, LB & des vitesses exprimées par les droites MA, LB, je conçois que par les centres A, B il passe des plans NR, HV paralelles au plan touchant CD. Du point M, j'abaisse la perpendiculaire MN sur le plan NR, & achevant le paralellogramme MPAN, la vitesse MA est composée de la vitesse perpendiculaire MN, & de la vitesse MP. De même, j'abaisse du point L la perpendiculaire LH sur le plan HV, & achevant le paralellogramme HBEL, la vitesse LB est composée de la vi-

tesse perpendiculaire HL, & de la vitesse LE; or, les vitesses MP, LE étant paralelles, n'agissent point l'une sur l'autre ; ainsi les corps ne s'approchent qu'avec les vitesses MN, HL ; le plus fort des deux détruira donc la vitesse du plus foible, & l'entraînera selon sa direction avec une vitesse qui leur sera commune (*N.* 181.) ; supposons que cette vitesse soit exprimée par la droite AS, le corps A poussé par cette vitesse AS, & par la vitesse NA qui agit toujours sur lui, prendra après le choc la direction de la diagonale AQ du paralollegramme AQ, formé par ces deux vitesses, & le corps B poussé par la vitesse BT égale à AS, & par la vitesse HB prendra après le choc la direction de la diagonale BX du paralellogramme BX formé par ces deux vitesses.

Et on trouvera de la même façon ce qui doit arriver dans tous les autres cas du choc oblique des corps non élastiques.

216. PROPOSITION XXXIV. *Si un corps élastique* A (Fig. 60) *choque avec une direction oblique* AD, *un autre corps élastique* BC, *qu'il ne peut ébranler, il se reflechira après le choc en faisant l'angle de reflexion* PDC *égal à l'angle d'incidence* ADB.

Supposons que la vitesse de A soit exprimée par la direction AD; du point A, j'abaisse sur BC la perpendiculaire AH, & achevant le paralellogramme AHDE, la vitesse AD est composée de la vitesse perpendiculaire AH, & de la vitesse AE paralelle au corps BC; ainsi A ne choque le corps BC qu'avec la vitesse AH, & comme il ne peut ébranler le corps B, il doit rebrousser chemin avec la même vitesse AH ou DE (*N.* 203.) ; or, la vitesse AE agit toujours sur lui, & le pousse vers Q; faisant donc DC = AE, & achevant le paralellogramme DCPE composé des deux vitesses DE, DC, le corps A prendra la direction de la diagonale DP. Le triangle rectangle DPC sera donc semblable & égal au triangle rectangle DAH, à cause de DC = DH, & de CP = AH, & par conséquent l'angle de reflexion PDC sera égal à l'angle d'incidence ADH.

217. PROBLEME. *Déterminer ce qui doit arriver dans le choc oblique de deux corps élastiques, dont il n'y en a aucun qui resiste invinciblement.*

En premier lieu, supposons que le corps A (*Fig. 61.*) avec une vitesse AR aille choquer obliquement le corps B qui lui est égal, & que les deux corps soient sphériques. Je conçois au point R où se fait le choc, un plan ST qui touche le corps B ; du point A, j'abaisse la perpendiculaire AS sur ce plan, & achevant le

paralellogramme AMRS, la viteſſe eſt compoſée de la viteſſe perpendiculaire AS, & de la viteſſe AM, laquelle étant paralelle à ST ne peut agir ſur B. Ainſi A choque directement B avec la viteſſe AS ou MR; donc à cauſe de l'égalité des maſſes le corps B après le choc ſe meut ſelon la direction RQ avec la viteſſe MR (*N.* 194.), & A doit être en repos ſelon cette direction; mais comme il eſt toujours pouſſé par la viteſſe AM, il doit prendre après le choc la direction RT paralelle à AM avec la viteſſe AM.

En ſecond lieu, ſuppoſons que le corps A (*Fig.* 62.) avec une viteſſe MA choque obliquement le corps B moindre que lui, & qui eſt en repos. Je conçois que par le centre A, il paſſe un plan NQ paralelle au plan touchant ST. Du point M, j'abaiſſe MN perpendiculaire ſur ce plan, & achevant le paralellogramme MNAE, la viteſſe MA eſt compoſée de la viteſſe perpendiculaire MN, & de la viteſſe ME, laquelle étant paralelle au plan touchant ST, ne peut point agir ſur B; ainſi A n'agit ſur B qu'avec la viteſſe MN ou EA, & comme B eſt moindre que A, on trouvera, ſelon les régles établies ci-deſſus (*N.* 195.), qu'après le choc, le corps B aura une viteſſe ſelon la direction EA plus grande que la viteſſe de A ſelon cette direction. Suppoſant donc que la viteſſe de B ſoit exprimée par la droite BH, & celle de A par la droite AX, le corps B prendra la direction BH qui eſt la même que EA avec la viteſſe BH; mais le corps A pouſſé par la viteſſe AX, & par la viteſſe ME ou AQ ſon égale, laquelle agit ſur lui, prendra la direction de la diagonale AV du paralellogramme AV compoſé des deux viteſſes, & ſa viteſſe ſera exprimée par la droite AV.

Et on trouvera de la même façon ce qui doit arriver dans tous les autres cas du choc oblique des corps élaſtiques.

Du Choc des Bombes contre les Corps qu'elles rencontrent ; & de leurs enfoncemens dans les Terres.

218. Si une bombe A (*Fig.* 63.) tirée avec une direction oblique AB décrit une parabole ALC, & qu'après avoir diviſé ſa direction AB en parties égales AE, EF, & on abaiſſe des points de diviſion des perpendiculaires EM, FN, &c. ſur l'amplitude AC, il eſt évident que cette amplitude ſera diviſée en un même nombre de parties égales, & que les arcs paraboliques AH,

HL, &c. que ces perpendiculaires couperont seront décrits par la bombe dans des tems égaux à ceux que la bombe employeroit à parcourir les droites AE, EC, &c. sur sa direction si la pesanteur ne l'abaissoit ; car nous avons démontré ci-dessus que tandis que la bombe devroit être en E, la pesanteur l'abaisse, de sorte qu'elle se trouve en H, que tandis qu'elle devroit être en F, la pesanteur fait qu'elle se trouve en L, &c. or, les parties égales AE, EF seroient parcourues dans des tems égaux, à cause que le mouvement de la direction AB est uniforme ; donc les arcs AH, HL, &c. sont aussi parcourus dans des tems égaux.

Supposant donc que les divisions de la direction AB soient infiniment proches, les petits arcs AH, HL, &c. seront aussi infiniment petits, & pourront être regardés comme des petites lignes droites qui composent la courbe parabolique, & qui étant prolongées deviendroient tangentes de la courbe ; donc on peut considérer la bombe comme parcourant dans des tems égaux des petites droites qui sont dans la direction des tangentes, & par conséquent en quelque point de la parabole que la bombe se trouve, elle est dans la direction de la tangente à ce point.

219. *Une même parabole* ARC *ne peut pas être décrite par deux vitesses différentes, à commencer par un même point* A.

Je divise la direction AB en parties égales AE, EF, &c. qui représentent les espaces égaux que la bombe parcoureroit sur cette direction dans des tems égaux, si la pesanteur ne l'abaissoit pas ; ainsi dans le premier tems, la bombe parcoureroit AE dans les deux premiers elle parcoureroit AF, dans les trois premiers elle parcoureroit AT, & ainsi de suite, & les abaissemens EH, LF, &c. causés par la pesanteur à la fin du premier tems, des deux premiers, des trois premiers, &c. sont entr'eux comme les quarrés de ces tems, ou comme les quarrés des espaces AE, AF, AT, &c.

Supposons maintenant qu'une bombe égale à la premiere soit tirée du même point A avec la même direction, mais avec moins de vitesse, les tems qu'elle employera à parcourir les espaces AE, AF, AT, &c. seront donc plus longs, & par conséquent l'abaissement EO causé par la pesanteur à la fin du premier tems AE, sera plus long que l'abaissement EH, puisque la pesanteur aura agi dans un tems plus long ; or, cet abaissement EO sera à l'abaissement FV que la pesanteur aura causé à la fin des deux premiers tems, comme le quarré de AE au quarré de AF, ou

comme l'abaiſſement EH à l'abaiſſement FL; faiſant donc EH. FL :: EO. FV, on aura FV plus grand que FL, à cauſe de EO plus grand que EH, & par un ſemblable raiſonnement on trouvera que tous les autres abaiſſemens ſeront plus grands que les abaiſſemens TS, &c. donc la bombe tirée avec cette ſeconde viteſſe décrira une parabole qui ne ſera pas la même que la parabole ARC, mais qui paſſera en deſſous.

Et on prouvera de la même façon que ſi la bombe étoit tirée avec une viteſſe plus grande, elle employeroit moins de tems à parcourir les eſpaces AE, AF, &c. & que par conſéquent les abaiſſemens à la fin de ces tems devenant moins longs, la parabole qu'elle décriroit paſſeroit en deſſus de la parabole ARC.

Au reſte, j'ai dit qu'on ne pouvoit pas décrire la même parabole avec deux viteſſes différentes, à commencer par un même point A, car il eſt viſible qu'une bombe qui ſeroit tirée horizontalement au ſommet R parcoureroit la même parabole RA avec une viteſſe différente (*N.* 131.).

220. Proposition XXXV. *Si une bombe* A (Fig. 64.) *tirée obliquement à l'horizon, choque un plan horizontal pendant ſa courſe; ſoit en montant ou en deſcendant, elle le choque avec la viteſſe qu'elle auroit acquiſe, ſi elle étoit tombée par ſon propre poids d'une hauteur* BR *égale à la diſtance qui ſe trouve entre le point* B *de la parabole où elle ſe trouve lorſqu'elle choque le plan, & la tangente* CR *au ſommet de la parabole qu'elle décrit.*

Quand la bombe eſt parvenue au point B, ſa force eſt égale à la force d'une bombe de même poids qui ſeroit tirée du point B ſelon la direction de la tangente BL au point B, & qui décriroit la parabole reſtante BCH, car cette parabole BC ne peut pas être décrite par deux viteſſes différentes (*N.* 219.); or, cette force feroit décrire à la bombe la tangente BL dans un tems égal à celui qu'elle employe à parcourir l'arc BC, menant donc l'ordonnée BE, & achevant le paralellogramme BECL la force BL eſt compoſée des deux BE, BS dont l'une feroit parcourir à la bombe la ligne horizontale BE, & l'autre la verticale BS dans un tems égal à celui que la force compoſée BL employeroit à lui faire parcourir l'eſpace BL. Mais la viteſſe verticale BS eſt égale à la viteſſe que la bombe auroit acquiſe ſi elle étoit tombée par ſon propre poids de la moitié RB de la hauteur SB; car nous avons démontré (*N.* 104.) que cette viteſſe acquiſe feroit parcourir un eſpace double de la hauteur RB; donc puiſque la bombe

ne

ne peut choquer le plan horizontal mis en B qu'avec sa viteſſe verticale, à cauſe que l'horizontale BE eſt paralelle à ce plan, elle le choque avec la viteſſe qu'elle auroit acquiſe, ſi elle étoit tombée de la hauteur BR.

Pour démontrer que la bombe en deſcendant choque un plan horizontal; par exemple, en P avec une viteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur NP, il n'y a qu'à obſerver que quand la bombe eſt parvenue au ſommet C de la parabole, ſa force eſt égale à celle d'une bombe de même poids qui ſeroit tirée du point C avec une direction horiſontale CN, & qui décriroit la demi-parabole CPH, car cette demi-parabole ne peut pas être décrite par deux forces différentes. Or dans le tems que cette force feroit décrire ſur la ligne horizontale la droite CN, la peſanteur fait deſcendre la bombe d'une hauteur verticale NP, & le corps horizontal mis en P n'eſt choqué que par ce mouvement vertical, à cauſe que le mouvement horizontal CN lui eſt paralelle, donc ce corps eſt choqué avec la viteſſe acquiſe par la chute NP.

221. COROLLAIRE. Il ſuit de-là qu'une bombe frappe auſſi fort un plan horizontal au déboucher A du mortier qu'à la fin H de ſon amplitude, puiſque les diſtances AO, HX ſont égales; qu'elle frappe également en montant ou en deſcendant lorſque les points B, P où elle frappe ſont également éloignés du ſommet A, & que les forces avec leſquelles elle frappe dans les points A, B, inégalement éloignés du ſommet, ſont entr'elles comme les racines des diſtances AO, BR, car ces forces ſont comme les viteſſes acquiſes par les chutes OA, RB, & ces viteſſes ſont comme les racines de ces hauteurs par les régles du mouvement acceleré.

222. PROPOSITION XXXVI. *Si une bombe* A (Fig. 65.) *tirée obliquement à l'horizon choque pendant ſa courſe, ſoit en montant ou en deſcendant un plan* ED *perpendiculaire ſur ſa direction, c'eſt-à-dire perpendiculaire à la tangente* BL *qui paſſe par le point du choc, la viteſſe avec laquelle elle choque ce plan eſt égale à la viteſſe qu'elle auroit acquiſe, ſi elle étoit tombée de la hauteur du quart du paramétre du diamétre qui paſſe par le point* B *où ſe fait le choc.*

Lorſque la bombe eſt parvenue en B, ſa force eſt égale à celle d'une bombe de même poids qui ſeroit tirée du point B avec la direction BL, & qui décriroit la parabole BCN, car cette parabole ne peut pas être décrite avec deux viteſſes différentes (*N.*219).

Or cette force eſt égale à la viteſſe que la bombe auroit acquiſe en tombant de la hauteur du quart du paramétre du diamétre qui paſſe par le point B (*N.* 138.) ; donc la bombe choque le plan perpendiculaire ED avec cette viteſſe.

Pour démontrer que la bombe en deſcendant choque un plan MZ perpendiculaire à ſa direction au point du choc H avec une viteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur du quart du paramétre du diamétre qui paſſe par le même point ; je mene au point H la tangente HL ; du ſommet C, je mene CR paralelle à la tangente, & par conſéquent double ordonnée au diamétre HP, & du point R, je mene RV paralelle à LC & qui coupe la tangente LH prolongée au point V, ainſi l'abaiſſement VR eſt égal à l'abaiſſement LC, à cauſe des paralelles LV, CR ; & comme HP paralelle à LC & VR coupe la droite CR en deux également, la droite LV eſt auſſi coupée en deux également en H. Cela poſé.

Quand la bombe eſt parvenue en H, il eſt clair que ſi elle ne rencontroit point d'obſtacles, elle continueroit à ſe mouvoir & décriroit la parabole HR, ainſi ſa force ſeroit égale à celle d'une bombe de même poids, laquelle étant tirée du point H avec la direction HV parcourreroit la même parabole HR ; or, ſi cette ſeconde bombe au lieu d'être tirée ſelon la direction HV étoit tirée ſelon la direction oppoſée HL, elle parcourreroit ſur ſa direction HL l'eſpace HL = HV dans un tems égal à celui qu'elle auroit employé à parcourir l'eſpace HV, & par conſéquent l'abaiſſement LC cauſé par la peſanteur pendant le tems employé à parcourir l'eſpace LH ſeroit égal à l'abaiſſement VR cauſé par la peſanteur pendant le tems employé à parcourir l'eſpace HV ; donc cette ſeconde bombe tirée ſelon la direction HL décriroit la parabole HC, & par conſéquent ſa viteſſe ſeroit égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant d'une hauteur égale au quart du paramétre du diamétre qui paſſe par le point H (*N.* 138.) ; or la viteſſe de la bombe tirée du point A & parvenue en H eſt la même que la viteſſe de cette ſeconde bombe, comme on vient de voir. Donc cette bombe choque le plan MZ perpendiculaire à ſa direction avec une viteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant d'une hauteur égale au quart du paramétre du diamétre qui paſſe par le point H.

223. COROLLAIRE Ier. *Si du point de projection* A (Fig. 66.) *on éleve perpendiculairement ſur l'amplitude* AN *une droite* AE *égale au*

quart du paramétre du diamétre qui passe par le point A, *& que de l'extrêmité* E, *on mene* EL *paralelle à l'amplitude, qu'ensuite d'un autre point quelconque* B *de la parabole, on mene une perpendiculaire* BT *sur* EL. *Je dis que la vitesse avec laquelle la bombe frapperoit en* A *un plan perpendiculaire à sa direction ou à la tangente* AS *est à la vitesse avec laquelle elle frapperoit en* B *un plan perpendiculaire à sa direction ou à la tangente* BV *comme la racine de la hauteur* AE *est à la racine de la hauteur* BT.

Puisque la bombe tirée du point A avec la direction AS décrit la parabole ACN, sa vitesse est égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur EA du quart du paramétre du diamétre qui passe par A (*N.* 138.). Or, si du point A, je mene au foyer O de la parabole la droite AO, cette droite AO sera égale au quart du paramétre du diamétre qui passe par le point A, ainsi qu'il a été dit dans les Sections coniques. Donc OA sera égal à AE, & par conséquent EL doit être la directrice de la parabole, comme il a été enseigné dans le même endroit. Ainsi, si du point B, je mene au même foyer O la droite BO qui sera aussi le quart du paramétre du diamétre qui passe par le point B, cette droite sera égale à BT, & par conséquent BT sera le quart du paramétre du diamétre qui passe par le point B. Mais nous venons de voir dans cette Proposition que la bombe choque en A un plan perpendiculaire à sa direction AS avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur AE égale au quart du paramétre du diamétre qui passe par le point A, & qu'elle choque en B un plan perpendiculaire à sa direction BV avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur BT égale au quart du paramétre du diamétre qui passe par le point B, & ces deux vitesses acquises sont entr'elles comme les racines des hauteurs EA, TB; donc la force du choc en A est à la force du choc en B, comme la racine de EA est à la racine de BT.

224. Corollaire II. De-là il suit qu'une bombe frappe aussi fort au débouché A de la piece, un plan perpendiculaire à sa direction, qu'elle frappe à l'extrêmité N de son amplitude un plan perpendiculaire à sa direction; que dans des points B, H également éloignés de la directrice ou de l'amplitude, elle frappe avec la même force, &c.

225. Corollaire III. *Si une bombe* A (Fig. 67.) *est tirée successivement avec la même force sous deux angles également éloignés de*

45 degrés, ensorte qu'elle décrive deux paraboles ACN, ARN *qui ont la même amplitude* AN. *Je dis que cette bombe, dans l'une & l'autre projection, choquera avec la même force des plans perpendiculaires à ses directions, non-seulement au débouché de la piece, & à la fin* N *de l'amplitude, mais encore dans des points* B, H *également éloignés de l'amplitude.*

Du point A, j'éleve perpendiculairement sur l'amplitude AN la droite AE égale au quart du paramétre du diamétre qui passe par le point A de la parabole ARN; ainsi la vitesse de la bombe au débouché de la piece sera égale à la vitesse qu'elle auroit acquise en tombant de cette hauteur (*N.* 138.); or, avec la même vitesse, la bombe décrit l'autre parabole ACN; donc la droite AE est aussi le quart du paramétre du diamétre qui passe par le point A de la parabole ACN. Menant donc du point E la droite EL paralelle à l'amplitude, cette droite sera la directrice des deux paraboles; car si du point A, je mene une droite au foyer de la parabole ARN, cette droite sera égale au quart du paramétre du diamétre qui passe par le point A de la parabole ARN, & par conséquent elle sera égale à AE, & la droite EL sera la directrice de cette parabole; de même, si du point A je mene une droite au foyer de la parabole ACN, cette droite sera égale au quart du paramétre du diamétre qui passe par le point A de la parabole ACN, & par conséquent elle sera aussi égale à AE, & la droite EL sera aussi la directrice de cette parabole. Cela posé.

Quand la Bombe décrit la parabole ARN, le choc en A & le choc en N sur des plans perpendiculaires aux directions, c'est-à-dire aux tangentes aux points A & N sont égaux, puisque les vitesses de ces chocs sont entr'elles comme les racines des hauteurs égales AE, NL, (*N.* 223.) de même quand la Bombe décrit la parabole ACN, le choc en A & le choc en N sur des plans perpendiculaires aux directions sont encore égaux entr'eux & aux deux précedens, à cause que leurs vitesses sont comme les vitesses qui seroient acquises si la Bombe tomboit des hauteurs AE, LN. Donc dans les deux projections la Bombe frappe avec la même force au débouché & à la fin AN les plans perpendiculaires aux directions.

Maintenant supposons que dans la projection ARN la Bombe choque un plan perpendiculaire à sa direction au point H, & que dans la projection ACM elle choque un plan perpendiculaire à sa direction au point B autant éloigné de l'amplitude que le point H,

La vitesse avec laquelle elle choquera en H sera égale à la vitesse qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur HV qui est le quart du paramétre du diamétre qui passe par le point H (*N.* 222. 223.) & par la même raison elle choqueroit en B avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur TB qui est le quart du paramétre du diamétre qui passe par le point B. Or les deux hauteurs VH, TB sont égales; donc les vitesses avec lesquelles la Bombe frappe en H un plan perpendiculaire à sa direction est égale à celle avec laquelle elle frappe en B un plan perpendiculaire à sa direction.

226. COROLLAIRE IV. En general il est donc faux que de deux Bombes égales tirées sous des angles également éloignées de 45 degrés, celle qui est tirée au-dessus de 45 degrés frappe plus fort que celle qui est tirée en-dessous, comme on le croit communément. Cela n'est vrai que lorsque les plans sur lesquels elles tombent sont horizontaux; car en ce cas-là la Bombe qui décrit la parabole ARN (*Fig.* 68.) choque en N un plan horizontal avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur TN comprise entre la tangente RT au sommet R & l'amplitude AN (*N.* 220.) & la Bombe qui décrit la parabole ACN choque le plan horizontal en N avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur MN comprise entre la tangente CM au sommet C & l'amplitude. Or ces deux hauteurs sont inégales; donc les vitesses des chocs qui sont comme les racines de ces hauteurs sont aussi inégales, & la Bombe qui décrit la parabole ARN choque plus fort que la Bombe qui décrit la parabole ACN. Mais la même chose n'arrive plus lorsque les plans choqués sont perpendiculaires aux directions comme on vient de voir, ni lorsqu'ils sont obliques aux directions & à l'horizon, comme on le verra bien-tôt.

Bien plus, il se peut faire que la Bombe tirée sous l'angle au-dessus de 45 degrés choque moins fort que celle qui est tirée sous l'angle en-dessous de 45 degrés. Car si le plan choqué en N (*Fig.* 68.) par la Bombe qui décrit la parabole ACN est perpendiculaire à sa direction ou tangente NS, ce même plan sera oblique à la direction ou tangente de la parabole ARN; ainsi la Bombe qui décrira la parabole ARN ne choquera pas ce plan avec autant de force que si elle le choquoit perpendiculairement. Mais si elle choquoit ce plan perpendiculairement, sa force seroit égale à celle de la Bombe qui décriroit la parabole ACN & qui cho-

queroit le même plan perpendiculairement, (*N.* 225.) Donc le choc oblique de la bombe qui décriroit la parabole ARN est moindre que le choc direct de celle qui décriroit la parabole ACN.

227. COROLLAIRE V. De-là il suit que dans la pratique, lorsqu'on veut tirer sur des plans inclinés à l'horizon, comme des toits de maisons, de voûtes ou de magazins, il faut tirer, non pas sous le plus grand angle, mais sous celui qui fait que la Bombe peut choquer moins obliquement.

228. PROPOSITION XXXVI. *Si une Bombe* (Fig. 69.) *choque dans quelque point* B *de sa parabole, un plan* MN *incliné à l'horizon & à sa direction* BR, *la vitesse avec laquelle elle choque ce plan est à celle avec laquelle elle le choqueroit s'il étoit perpendiculaire à sa direction comme le sinus de l'angle d'incidence est au sinus droit ou rayon.*

Je prens sur la direction BR une partie BP égale à la racine du paramétre appartenant au point B. Du point P j'abbaisse la perpendiculaire PM sur le plan MN, & j'acheve le paralellogramme PMBQ.

Si le choc étoit direct, la Bombe frapperoit le plan avec une vitesse exprimée par PB (*N.* 222.) mais puisque le choc est oblique, la vitesse PB est composée de la vitesse perpendiculaire PM & de la vitesse PQ paralelle à MN. Or celle-ci n'agit point sur MN; donc la Bombe frappe avec la vitesse PM. Mais dans le triangle PMB les côtés PM, PB sont entr'eux comme les sinus des angles opposés, c'est-à-dire comme le sinus de l'angle d'incidence PBM au sinus de l'angle droit PMB; donc la vitesse PM avec laquelle la Bombe frappe le plan est à la vitesse PB comme le sinus PM de l'angle d'incidence PMB est à un sinus droit PB.

Cherchant donc dans les Tables des Sinus le rayon & le sinus de l'angle d'incidence, on dira comme le rayon est au sinus; ainsi PB est à un quatriéme terme qui sera la valeur de PM.

229. COROLLAIRE. *Si deux Bombes de même poids sont tirées avec la même force sous deux angles également éloignés de* 45 *degrés, ensorte que l'amplitude de deux paraboles soit la même,* (Fig. 70.) *& qu'elles viennent à choquer dans des points* B, N *également éloignés de leur amplitude des plans* OT, VS *également inclinés à leur direction* HB, NE, *je dis qu'elles choqueront ces plans avec des forces égales.*

Les paramétres appartenans aux points B, N seront égaux

comme on a vû ci-dessus; c'est pourquoi si les deux plans étoient perpendiculaires, les deux chocs seroient égaux, puisque les vitesses seroient comme les racines de ces paramétres égaux, (*N.* 225.) mais comme les chocs sont obliques, je prens sur les directions BH, NX égales chacune à la racine de l'un ou l'autre parametre, & des points H, X j'abbaisse sur les plans les perpendiculaires HO, XV. Ainsi la vitesse avec laquelle la Bombe qui décrit la parabole ARM choquera le plan VS avec la vitesse XV, & celle qui décrit la parabole ACM choquera le plan OT avec la vitesse HO; or ces deux vitesses VS, OT sont égales à cause que les triangles rectangles HBO, XNV ayant l'angle d'incidence HBO égal à l'angle d'incidence XNV & l'hypothenuse HB égale à l'hypothenuse XN sont égaux entr'eux; donc les chocs sont aussi égaux.

Et il faudroit dire la même chose, si le choc se faisoit au point M qui est l'extrêmité de l'amplitude.

230. Corollaire II. Mais si les angles d'incidence étoient inégaux & les distances des points B, N à l'amplitude égales entr'elles, les vitesses ou sinus XV, HO seroient inégaux, & les rayons ou sinus droits XN, HB seroient égaux, c'est pourquoi les vitesses des chocs seroient entr'elles comme les sinus des angles d'incidence.

231. Corollaire III. D'où il suit que si l'angle d'incidence XNV étoit moindre que l'angle d'incidence HBO, la vitesse avec laquelle la Bombe qui décrit la plus haute parabole choqueroit son plan, seroit moindre que celle avec laquelle l'autre Bombe choqueroit le sien.

232. Corollaire IV. Enfin si les angles d'incidence étoient inégaux, & les distances des points B, N à l'amplitude inégales aussi, les sinus XV, HO seroient différens, & les rayons XN, HB le seroient aussi, puisque les paramétres appartenans aux points B, N ne seroient plus égaux; c'est pourquoi la vitesse XV seroit à la vitesse HO comme le sinus de l'angle d'incidence XNV par rapport au rayon droit XN est au sinus de l'angle d'incidence HBO par rapport au rayon HB.

Après avoir donc cherché dans les Tables le rayon & le sinus de l'angle d'incidence XNV, on diroit : comme le rayon est à ce sinus, ainsi XN racine du paramétre appartenant au point N est à un quatriéme terme qui seroit la vitesse XV. De même, après avoir cherché dans les Tables le sinus de l'angle d'inci-

dence HBO, on diroit : comme le rayon est au sinus, ainsi HB racine du paramétre appartenant au point B est à un quatriéme terme qui seroit la vitesse HO.

233. PROPOSITION XXXVIII. *Les enfoncemens des Bombes dans les terres sur lesquelles elles tombent, sont entr'eux comme les quarrés des vitesses acquises à la fin de leurs chutes, ou comme les hauteurs des paraboles qu'elles décrivent.* (Fig. 71.)

Soient les deux paraboles ACN, ARH décrites par deux Bombes tirées avec des forces inégales, la hauteur de la premiere est CP ou QN, & la hauteur de la seconde est RE ou TH; ces deux Bombes à la fin de leurs amplitudes N, H frapperoient un plan horizontal avec des vitesses égales aux racines des hauteurs QN, TH, (*N.* 220.) supposant donc que la terre sur laquelle elles tombent soit assez ferme pour soutenir ces Bombes si on les y mettoit avec la main, il est visible que si elles s'enfoncent en tombant, ce n'est que par l'effet des vitesses acquises & nullement par celui de leur pesanteur; il s'agit donc de faire voir que les enfoncemens de ces Bombes sont comme les quarrés de leurs vitesses, ou comme leurs hauteurs, & cela se démontre ordinairement par une expérience constante que l'on fait ainsi:

On prend de l'argile ou de la terre glaise qui ait assez de consistance pour soutenir une boule qu'on y met dessus. Après quoi, reprenant cette boule & la laissant tomber successivement de différentes hauteurs, on trouve toujours que les enfoncemens qu'elle a faits dans l'argile sont entr'eux dans la raison des hauteurs. Or, pour rendre raison de ceci, il faut considérer que la terre est composée d'une infinité de couches les unes sur les autres, lesquelles par leur résistance détruisent peu à peu les forces de la boule, & quoique chaque lame résiste davantage & ôte plus de vitesse à la Bombe qui tombe de moins haut en N; cependant comme celle qui tombe en H va plus vîte, & qu'elle rencontre plus de lames dans un même tems, il se fait une compensation, de façon que dans des tems égaux les deux Bombes perdent des degrés égaux de vitesse. Il arrive donc ici la même chose qu'il arrive à deux corps qui après être descendus vers le centre de la terre de deux hauteurs inégales remontent avec leurs vitesses acquises, & perdent dans des tems égaux des degrés égaux de cette vitesse; or les espaces que ces corps se trouvent avoir parcouru lorsque leurs vitesses sont totalement détruites, sont

ſont entr'eux comme les quarrés des viteſſes ou comme les hauteurs; donc auſſi les enfoncemens des deux Bombes doivent être auſſi comme les quarrés des viteſſes ou comme les hauteurs.

Il y a cependant une différence; car les deux corps en remontant parcourent des eſpaces égaux aux hauteurs dont ils ſont deſcendus, au lieu que les enfoncemens des Bombes ne ſont pas égaux aux hauteurs de leurs paraboles, mais ſimplement proportionnelles à ces hauteurs, & la raiſon en eſt que les réſiſtances des lames de terre qu'elles percent eſt beaucoup plus grande à chaque inſtant que la réſiſtance que la peſanteur leur oppoſeroit à chaque inſtant, ſi elles remontoient avec leurs viteſſes acquiſes.

DE LA STATIQUE.

Du Centre de Gravité des Corps ſolides.

234. On dit que deux corps ſont en *Equilibre*, lorſqu'ils s'empêchent mutuellement de ſe mouuoir, ou lorſqu'ils s'entretiennent l'un & l'autre dans le repos; par exemple, ſi deux corps A, B, (*Fig.* 72.) ſont attachés aux extrêmités d'un leviet AB ſuſpendu par un point C, & que le corps A empêche le corps B de deſcendre vers le centre de la terre, & le corps B empêche le corps A de deſcendre, les deux corps ſeront en équilibre, & il n'y aura point de mouvement. Que ſi au lieu de l'un des corps A on met une puiſſance qui empêche le corps B de deſcendre, & qui ne puiſſe pas non plus le faire monter, la puiſſance & le poids ſeronr en équilibre.

Le point C autour duquel deux corps A, B ſont en équilibre, ſe nomme *centre d'équilibre.*

235. Dans tous les corps il y a un point nommé *centre de gravité* ou de peſanteur, qui eſt tel que ſi ce centre eſt empêché de deſcendre vers le centre de la terre, toutes les parties de ce corps ſont en équilibre autour de ce centre.

236. Le *centre de grandeur* d'un corps eſt un point, par lequel on peut faire paſſer un plan qui diviſe ce corps en deux parties égales. Dans les corps homogenes, c'eſt-à-dire dont toutes les parties ſont d'une même matiere qui n'eſt ni plus ni moins condenſe, le centre de grandeur eſt le même que le centre de gravité; car alors le poids d'un côté eſt égal au poids de l'autre côté.

237. Si une ligne AC, (*Fig.* 73.) tourne autour d'un point B, ce point se nomme *centre de mouvement*, & toute ligne droite MN qui passe par le point B & qui n'est pas dans le plan ou dans la surface que la ligne AC décrit pendant son mouvement, se nomme *Axe de mouvement*.

238. Comme une ligne AC peut tourner autour de son axe de mouvement de différentes façons, nous entendrons toujours dans la suite que cette ligne AC, (*Fig.* 74.) est dabord dans une position horizontale, que son axe de mouvement MN est aussi horizontal & perpendiculaire à AC, que AC tourne autour de cet axe en ne cessant jamais de lui être perpendiculaire, & que par conséquent le plan ARCH que cette ligne décrit est vertical, c'est-à-dire perpendiculaire à l'horizon & à l'axe MN de mouvement. Quand nous voudrons entendre les choses autrement, nous aurons soin de nous expliquer.

239. Lorsque nous parlerons de plusieurs corps attachés à différens points d'un levier qui tournera autour d'un axe de mouvement, nous considererons ce levier comme n'ayant aucune pesanteur, afin de pouvoir considerer les forces de ces corps indépendamment de la pesanteur du levier; mais comme dans la pratique la pesanteur négligée des leviers cause de l'alteration dans le rapport des forces de corps; nous nous réservons à corriger ce défaut, lorsque nous parlerons des machines.

240. Si deux corps attachés aux deux extrêmités d'un levier sont en équilibre autour du centre de mouvement; alors le centre de mouvement & le centre d'équilibre ne sont qu'un même point.

241. PROPOSITION XXXIX. *Les forces de deux ou plusieurs corps* A, B, &c. (Fig. 75.) *attachés à différens points d'un levier* AB *qui tourne autour d'un axe* MN *de mouvement, sont entr'elles comme les produits des masses par les parties du levier comprises entre ces corps & l'axe de mouvement, c'est-à-dire la force de* A *est à celle de* B *comme le produit* $A \times AC$ *est au produit* $B \times BC$.

Le corps B ne peut se mouvoir autour de MN, & décrire par exemple l'arc BR, que le corps A ne se meuve & décrive l'arc AS; car nous supposons que le levier AB est inflexible. Or, à cause des angles RCB, ACS égaux, les secteurs RCB, ACS sont semblables; donc BR. AS :: BC. AC. Or les arcs BR. AS. sont entr'eux comme les vitesses des deux corps, puisque ces deux arcs sont les espaces parcourus par les deux corps dans

le même tems ; donc les vitesses des deux corps sont aussi comme les rayons BC, AC, & par conséquent nous pouvons prendre ces deux rayons pour l'expression des vitesses. Or les forces sont entr'elles comme les quantités de mouvement, ou comme les produits des masses par les vitesses ; donc, les forces de A & B sont entr'elles comme les produits $A \times AC$, $B \times BC$.

242. *Remarque*. Cette Proposition est encore vraye, quand le levier n'est pas perpendiculaire à l'axe de mouvement. Supposons par exemple qu'un levier horizontal AB, (*Fig.* 76.) soit attaché fixement en C à son axe de mouvement MN aussi horizontal, mais oblique à AB, & que cet axe vienne à tourner autour de lui-même, c'est-à-dire autour de ses deux points fixes M, N, à peu près comme une broche tourne autour des chenets qui la soutiennent ; il est clair que le levier AB tournera autour de cet axe en conservant toujours son angle d'obliquité BCN ou ACM ; ainsi menant des points A, B des perpendiculaires AM, BN sur l'axe MN, les poids A, B seront toujours à ces mêmes distances de l'axe pendant leur mouvement, & décriront des circonferences dont les cercles seront perpendiculaires sur MN. Or les vitesses de ces poids seront entr'elles comme les circonferences décrites par ces poids, puisqu'elles seront décrites en même tems ; & par conséquent ces vitesses seront aussi comme les rayons AM, BN qui sont dans la même raison que leurs circonferences. Mais à cause des triangles semblables BNC, AMC, nous avons AM. BN : : AC. BC ; donc les vitesses des poids A, B seront entr'elles aussi comme AC, BC, & par conséquent leurs forces seront comme les produits $A \times AC$, $B \times BC$.

Ce qui fait voir que si nous avons choisi ci-dessus, (*N.* 238.) l'axe de mouvement perpendiculaire au levier, préférablement à tout autre, ce n'a été que pour fixer & aider en même tems l'imagination.

Lorsque deux ou plusieurs corps sont attachés à différens points d'un levier qui tourne autour d'un axe de mouvement, les produits $A \times AC$, $B \times BC$ des masses par les bras de levier ou par les parties du levier comprises entre les poids & le centre C de mouvement, se nomment *momens* des corps A, B ; ainsi le *moment* de A est $A \times AC$, le moment de B est $B \times BC$, & ainsi des autres.

243. Probleme. *Deux corps* A & B (Fig. 77.) *étant attachés*

à deux differens point d'un levier, trouver leur centre d'équilibre; c'est-à-dire le point par où il faudroit suspendre le levier, afin que les deux corps fussent en équilibre.

Je divise la distance AB des deux corps AC, CB en deux parties qui soient entr'elles réciproquement comme les poids des deux corps, c'est-à-dire je fais A. B :: BC. AC. Je mets la petite longueur BC du côté du corps B qui est le plus grand des deux, & la grande AC du côté de l'autre corps A, & le point de division C est le centre d'équilibre demandé.

Car afin que les deux corps soient en équilibre, il faut que le produit des corps par leurs distances au centre soient égaux, puisqu'il faut que leurs momens ou leurs forces soient égales; or, par la construction nous avons A. B :: BC. AC. Donc $A \times AC = B \times BC$. Donc il y a équilibre.

244. PROBLEME. *Un corps* A *étant attaché à l'un des bras* AD *d'un levier dont le centre de mouvement est en* C (Fig. 77.) *trouver à quel point il faut attacher un autre corps* B, *afin qu'il y ait équilibre.*

Je fais comme le poids B est au poids A; ainsi la distance AC du poids A au centre C est à un quatriéme terme qui sera la distance CB à laquelle il faut attacher le poids; car puisque B. A :: AC. BC; donc $B \times BC = A \times AC$, & par conséquent les deux corps doivent être en équilibre.

245. PROBLEME. *Deux ou plusieurs corps* A, B, D, *&c.* (Fig. 78.) *étant attachés à un bras* CD *d'un levier* MD *qui tourne autour d'un centre de mouvement* C, *trouver le point où il faudroit les attacher tous, afin qu'ils eussent une force égale à la somme des forces qu'ils ont chacun en leur place.*

Par la condition du Probleme, la force de la somme des poids attachés tous ensemble à la distance du point C qu'on nous demande, sera le produit de la somme de ces poids multipliée par la distance demandée, & cette force doit être égale aux trois produits du corps A par sa distance AC, du corps B par sa distance BC, & du corps D par sa distance DC; car ces trois produits expriment les forces des trois corps (*N.* 241.) nommant donc x la distance demandée, nous avons $Ax + Bx + Dx = A \times AC + B \times BC + D \times DC$; & divisant de part & d'autre par $A + B + D$, nous aurons $x = \frac{A \times AC + B \times BC + D \times DC}{A + B + C}$; d'où l'on tire cette regle générale que,

Pour trouver la distance à laquelle il faut attacher les corps afin qu'ils ayent une force égale à la somme des forces qu'ils ont chacun en leur place, il faut multiplier chaque corps par sa distance au centre du mouvement, & diviser la somme des produits par la somme des corps, ce qui donnera un quotient qui sera la distance demandée.

Soit $A=1$, $B=2$, $D=4$, $AC=1$, $BC=2$, $DC=3$, nous aurons $A \times AC=1$, $B \times BC=4$, & $D \times DC=12$; donc $x=\frac{1+4+12}{1+2+4}=\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$; prenant donc une longueur CH telle que nous ayons CA. CH :: 1. $2\frac{3}{7}$, la longueur CH sera la distance à laquelle il faut attacher tous les poids, afin qu'ils ayent là une force égale à la somme des forces qu'ils ont chacun en leur place.

246. PROBLEME. *Plusieurs poids* A, B, D, E (Fig. 79.) *étant attachés en differens points d'un levier, touver leur centre d'équilibre.*

Je conçois que le levier tourne autour d'un axe de mouvement mis à son extrêmité C; je cherche la distance CH à laquelle il faudroit attacher tous les corps afin qu'ils eussent la même force sur CB qu'ils en ont étant chacun en leur place (*N.* 245.) & je dis que si l'on suspend le levier par le point H, tous les corps seront en équilibre.

Car quand le corps A est en sa place A, son moment ou sa force est $A \times AC$; & quand il sera en H, son moment ou sa force est $A \times CH$, ou $A \times AC + A \times AH$; donc la force qu'il gagne lorsqu'il est transporté en H, est $A \times AH$. Par la même raison, la force que le corps B transporté en C gagne, est $B \times BH$; ainsi la somme des forces que les corps A, B gagnent quand ils sont transportés en H, est $A \times AH + B \times BH$.

De l'autre côté, quand le corps D est en sa place D, son moment ou sa force est $D \times DC$, & quand il est transporté en H, sa force n'est plus que $D \times CH$, ou $D \times DC - D \times HD$; donc la force qu'il perd quand il est en H, est $D \times HD$. Par la même raison, la force que le corps E perd lorsqu'il est en H est $E \times HE$. Ainsi la somme des forces que les deux corps D, E perdent lorsqu'ils sont en H, est $D \times HD + E \times EH$.

Or, puisque la force des corps transportés en H est égale à la somme des forces qu'ils avoient chacun en leur place, il faut nécessairement que la somme des forces gagnées par les deux premiers soit égale à la somme des forces perdues par les deux autres; donc $A \times AH + B \times BH = D \times DH + E \times EH$.

Si nous concevons donc que le levier soit suspendu en H; c'est-à-dire que son centre de mouvement soit le point H, la force du corps A sur le bras AH sera $A \times AH$, & celle du corps B sera $B \times BH$, de même la force du corps D sur le bras EH sera $D \times DH$, & celle du corps E sera $E \times EH$; mais nous venons de trouver que la somme des deux premieres forces est égale à celle des deux secondes. Donc les quatre corps seront en équilibre autour du point H.

247. PROBLEME. *Deux ou plusieurs corps* A, B (Fig. 80.) *étant attachés à differens points d'un bras* CB *d'un levier* MB *qui tourne autour d'un centre* C *de mouvement, trouver à quelle distance de* C *il faut attacher un autre corps* D *sur l'autre bras* CM, *afin qu'il y ait équilibre.*

Par la condition du Probleme, il faut que la force du corps D soit égale à la somme des forces des deux corps. Donc le corps D multiplié par la distance cherchée doit être égal au produit de A par AC, plus le produit de B par BC. Ainsi nommant x la distance cherchée, nous aurons $D \times x = A \times AC + B \times BC$; & divisant de part & d'autre par D, nous aurons $x = \frac{A \times AC + B \times BC}{D}$, c'est-à-dire que si l'on divise la somme des momens de A & de B par le poids D, le quotient sera la distance cherchée.

Soit $A = 1$, $B = 2$, $D = 4$, $AC = 1$, $BC = 2$, nous aurons $A \times AC = 1$, $B \times BC = 4$, & partant $x = \frac{1+4}{4} = \frac{5}{4}$; prenant donc sur le bras MC une longueur MD telle qu'on ait $1 . \frac{5}{4} :: CA . CD$. le point D sera le point où il faudra attacher le poids D.

248. PROBLEME. *Deux ou plusieurs corps* A, B, (Fig. 80.) *étant attachés à differens points d'un bras* CB *d'un levier* MB *qui tourne autour d'un centre* C *de mouvement, trouver le poids qu'il faudroit mettre à un point* D *de l'autre bras* CM, *afin qu'il y eut équilibre.*

Je nomme x le poids qu'on demande, & par conséquent pour faire équilibre, nous aurons $x \times CD = A \times AC + B \times BC$; donc en divisant de part & d'autre par CD, nous aurons $x = \frac{A \times AC + B \times BC}{CD}$, c'est-à-dire que si l'on divise la somme des momens de A & de B par la distance donnée CD, le quotient sera la valeur du poids demandé.

Soit A=1, B=2, AC=1, BC=2, CD=$\frac{5}{4}$; donc A×AC =1, & B×BC=4; ainsi $x=\frac{1+4}{\frac{5}{4}}=\frac{4+16}{5}=\frac{20}{5}=4$, & par conséquent le poids demandé D doit être=4.

249. PROPOSITION XL. *Soit un levier horizontal* MD (Fig. 81.) *auquel est attaché fixement un autre levier horizontal* SR *qui le traverse & aux extrémités duquel sont deux poids* S R, *dont le centre d'équilibre sur* SR *est le point* H *où les deux leviers se coupent. Je dis que si le levier* MD *tourne autour d'un axe de mouvement* C *en entraînant avec lui le levier* SR, *la somme des momens ou des forces des poids* S, R *sur le bras* CD *du levier* MD *sera égale au moment ou à la force que ces deux poids auroient sur le même bras, s'ils étoient attachés au point* H *qui est leur centre d'équilibre sur le levier* SR.

Des points S, R je mene les droites SL, RO paralelles au levier MD, & les droites ST, RV paralelles à l'axe OL de mouvement.

Les corps S, R en tournant autour de LO décriront des circonferences dont les rayons sont les perpendiculaires SL, RO; ainsi les vitesses de ces corps seront comme ces circonferences ou comme leurs rayons SL, RO; or SL=CT à cause des paralelles, & OR=CV. Donc les vitesses des deux corps seront entr'elles comme les droites CT, CV, & par conséquent leurs forces ou momens sur les bras CD seront entr'eux comme les produits S×CT, R×CV, c'est-à-dire qu'ils peseront autant sur ce bras, que s'ils étoient mis en T & en V.

Or à cause que les poids S, R sont en équilibre autour du point H, nous avons RH. SH :: S. R; & à cause des triangles semblables HRV, HST, nous avons HR. HS :: HV. TH; donc HV. TH :: S. R, & par conséquent S×TH=R×HV. Mais S×TH est la quantité de force que le corps S mis en T gagneroit s'il étoit transporté en H; car alors son moment sur le bras CD seroit S×CH=S×CT+S×TH, & R×HV est la quantité de force que le corps R mis en V perdroit s'il étoit transporté en H, puisqu'alors son moment sur le bras CD seroit R×CH=R×VC−R×HV; donc le gain de force d'un côté étant égal à la perte de l'autre, les deux corps mis en H doivent avoir autant de force sur CD qu'ils en auroient s'ils étoient en T & en V, mais ils en auroient autant en T & en V qu'ils en ont en S & en R; donc les deux corps mis en H ont autant de force sur le bras CD, qu'ils en ont en S & en R.

250. *Remarque.* Cette Propoſition eſt encore véritable lorſque l'axe de mouvement LO (*Fig.* 82.) n'eſt pas perpendiculaire ſur le levier MD. Car alors les poids, S, R décriroient autour de LO des circonferences dont les rayons ſeroient les perpendiculaires PS, RQ differentes des droites SL, RO paralelles au levier MD; cependant à cauſe des triangles ſemblables SPL, RQO, nous aurions SP. RQ :: SL. RO, & par conſéquent les viteſſes des deux corps qui ſeroient entr'elles comme les rayons SP, RQ de leurs circonferences ſeroient auſſi comme les paralelles LS, RO, ou comme les droites CT, CV, & leur moment ou force ſur le bras CD ſeroient encore comme $S \times CT$, $R \times CV$, c'eſt-à-dire qu'ils feroient le même effort ſur CD que s'ils étoient en T & en V. Après quoi on prouveroit comme auparavant que les poids tranſportés en H auroient la même force que s'ils étoient en T & V, ou en S & R.

251. Probleme. *Pluſieurs corps* A, B, C, D (Fig. 83.) *étant ſur un plan horizontal, trouver leur centre d'équilibre commun.*

Je mene la ligne AB que je conſidere comme un levier auquel ſont attachés les deux poids A, B; je cherche ſur ce levier le centre d'équilibre E de ces deux corps; je mene du point E au poids C la droite EC que je conſidere comme un levier auquel ſeroit attaché en E les deux poids A & B, & en C le poids C; je cherche ſur le levier EC le centre d'équilibre H des deux poids A, B mis enſemble en E, & du poids C mis en C; du point H je mene au poids D la droite HD que je regarde comme un levier auquel les trois poids A, B, C ſeroient attachés en H, & le poids D en D, & cherchant ſur ce levier le centre d'équilibre L de trois poids A, B, C mis en H, & du poids D mis en D, je dis que le point L eſt le centre d'équilibre de tous les corps mis chacun en leur place.

Car ſi nous ſuppoſons que les trois leviers AB, EC, HD ſoient attachés fixement aux points E, H, les deux corps A, B étant en équilibre autour du point E, peſeront autant ſur le bras EH du levier EC que s'ils étoient tranſportés tous les deux en E (*N.* 249.) de même les deux poids A, B tranſportés enſemble en E ſur le levier EC ſont en équilibre autour du point H avec le poids C; donc les deux poids A, B mis au point E, & le poids C mis en C peſent autant ſur le bras HL du levier HD que s'ils étoient tous les trois mis en H; or par la conſtruction les trois poids mis en H & le poids D mis en D ſont en équilibre autour

autour du point L; donc si on remet tous les poids chacun en leur place, ils seront encore en équilibre autour du point L, puisqu'ils ne peseroient ni plus ni moins sur le bras HL.

252. PROPOSITION XLI. *Si plusieurs corps* A, B, C, D, (*Fig.* 84.) *mis sur un plan horizontal tournent autour d'un axe de mouvement* MN *aussi horizontal, en conservant toujours leurs distances* AM, BR, CP, DN *à cet axe. Je dis que la somme de leurs momens ou de leurs forces est égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient tous transportés à leur centre d'equilibre commun* L, *& qu'ils tournassent autour de l'axe* MN, *en conservant toujours la distance* LX *de ce centre à l'axe de mouvement.*

Je mene la droite AB, & cherchant sur cette ligne considerée comme un levier le centre E d'équilibre des corps A, B, je mene du point E la droite ES perpendiculaire à l'axe de mouvement, & des points A, B les droites AT, BV perpendiculaires sur ES prolongé en V; les corps A, B en tournant autour de MN décrivent des circonferences dont les rayons sont AM, BR; ainsi leurs vitesses sont comme les rayons ou leviers AM, BR; mais $AM = TS$ à cause des paralelles, & $BR = SV$; donc les vitesses des corps A, B sont comme les droites TS, SV, & par conséquent leurs momens sont comme $A \times TS$, $B \times VS$; c'est-à-dire que leurs momens sont les mêmes que s'ils étoient mis en T & V. Or, à cause que les corps A, B sont en équilibre autour du point E, nous avons B. A :: AE. EB, (*N.* 243.) & à cause des triangles semblables AET, EBV, nous avons AE, EB :: TE. EV; & partant, B. A :: TE. EV, ce qui donne $A \times TE = B \times EV$; mais $A \times TE$ est le moment ou la force que le corps A mis en T gagneroit si on le mettoit en E; car alors son moment seroit $A \times SE = A \times TS + A \times TE$, & $B \times EV$ est le moment ou la force que le corps B mis en V perdroit s'il étoit transporté en E, car alors son moment seroit $B \times ES = B \times VS - B \times EV$. Donc, puisque les corps mis en T & V auroient les mêmes forces qu'en A & en B, & qu'en les transportant tous les deux en E, le gain de force de l'un seroit égal à la perte de l'autre, il est clair que ces deux corps mis en E auroient autant de force que s'ils étoient en leur place A & B; & que par conséquent on aura $A \times ES + B \times ES = A \times AM + B \times BR$.

Concevant donc que ces deux corps A & B soient mis en E, je mene la droite EC, & cherchant sur ce levier le centre d'équilibre H des deux corps A & B mis en E, & du corps C je

prouverai comme ci-dessus que les forces de ces trois corps en tournant autour de MN sont égales à la force qu'ils auroient s'ils étoient mis ensemble au point H.

Et menant du point H la droite HD, puis cherchant sur ce levier le centre d'équilibre L des trois corps A, B, C mis en H, & du corps D, je prouverai encore que les quatre corps mis en L auront autant de force en tournant autour de MN que les trois corps A, B, C mis en H & le corps D en D; or les trois corps A, B, C mis en H ont la même force que si les deux A, B étoient en E, & le corps C en C, comme on vient de voir, & les deux A, B en ont autant en E que s'ils étoient en A & B; donc les quatre corps mis en L en ont autant que s'ils étoient en leurs places.

253. Corollaire. De-là il suit que si l'on multiplie les quatre corps A, B, C, D chacun par sa distance AM, BR, CP, DN, la somme des produits sera égale à la somme des quatre corps multipliée par la distance LX du centre de gravité; c'est-à-dire, qu'on aura $A \times AM + B \times BR + C \times CP + D \times DN = A \times LX + B \times LX + C \times LX + D \times LX$.

Application des Principes précédens à la Géométrie.

254. Ce que nous venons de dire touchant l'équilibre des corps, a donné occasion au Pere Guldin Jésuite d'inventer une Méthode génerale & fort commode pour trouver la solidité de tous les corps qui sont formés par la circonvolution d'un plan autour d'un axe de mouvement, & la mesure de leurs surfaces; & de-là on tire aussi la maniere de mesurer les Prismes tronqués par des plans inclinés à leurs bases, de quelque figure que soient ces bases, & de trouver la valeur de leurs surfaces. C'est ce que nous allons voir dans les Propositions suivantes.

255. Proposition XLII. *Si une ligne* AB (Fig. 85, 86, 87, 88.) *tourne autour d'un axe* MN *de mouvement, dans quelque position qu'elle soit, pourvû qu'elle soit horizontale & l'axe aussi, ou que l'un & l'autre soient dans un même plan, lequel on pourra toujours considerer comme horizontal, je dis que le plan ou la surface que cette ligne décrira en faisant une circonvolution entiere, est égale au produit de la ligne* AB *multipliée par la circonference que décrit son centre de gravité* C.

Concevons que la ligne AB soit un levier chargé dans tous ses

points de poids tous égaux, il eſt clair que le centre d'équilibre de ces points ſera ſur le milieu C de la ligne, puiſqu'il n'y en aura pas plus d'un côté que de l'autre; or tous ces poids en tournant autour de l'axe de mouvement MN, décriront des circonferences dont les rayons ſeront les perpendiculaires tirées de chacun des poids ſur MN; ainſi les viteſſes de ces poids ſeront entr'elles comme les circonferences décrites, & leurs momens ou forces ſeront les produits des poids par leur viteſſe ou par les circonferences qu'ils décrivent; mais la ſomme de ces momens ou produits eſt égale au moment que tous les corps auroient s'ils étoient tranſportés en C & qu'ils tournaſſent autour de MN, comme on a vû ci-deſſus, auquel cas ce moment n'eſt autre choſe que le produit de la ſomme des poids multipliée par la viteſſe commune, c'eſt-à-dire par la circonference décrite par le point C; donc la ſomme des produits des poids multipliés chacun par la circonference qu'il décrit en ſa place, eſt égale au produit de la ſomme des poids multipliée par la circonference qu'ils décriroient s'ils étoient mis chacun en C.

Or les points qui compoſent la ligne AB ſont entr'eux comme les poids, puiſqu'ils ſont tous égaux; donc la ſomme des produits de ces points par les circonferences qu'ils décrivent, ce qui n'eſt autre choſe que la ſomme de ces circonferences, eſt égale à la ſomme des points multipliée par la circonference que le point C décrit, ce qui n'eſt autre choſe que la ligne AB multipliée par la circonference que le point C décrit, puiſque la ſomme des points de la ligne AB eſt la même choſe que la ligne AB; mais la ſomme des circonferences décrites par tous les points chacun en ſa place, eſt le plan ou la ſurface AB décrite autour de MN; donc ce plan ou cette ſurface eſt égal au produit de la ligne AB multipliée par la circonference que ſon centre de gravité C décrit.

256. *Remarque*. Ceci s'accorde fort bien avec ce que la Géométrie nous enſeigne. Car ſi la ligne AB eſt perpendiculaire ſur l'axe de mouvement MN, (*Fig.* 85.) elle décrit un cercle, & nous ſçavons qu'un cercle eſt égal à la circonference que décrit ſon rayon AB multipliée par la moitié du rayon, ou à la circonference que décrit la moitié AC de ſon rayon multipliée par le rayon AB. Si AB eſt oblique ſur MN & le coupe en A, (*Fig.* 86.) elle décrit la ſurface d'un cône, & nous ſçavons que cette ſurface eſt égale au côté AB du cône multiplié par la cir-

conference moyenne décrite par la droite CX; si AB est oblique à AM sans le couper, (*Fig.* 87.) elle décrira la surface d'un cône tronqué, & nous sçavons que cette surface est égale au côté AB du cône tronqué multiplié par la circonference décrite par le rayon moyen CX; enfin, si AB est paralelle à MN, elle décrit la surface d'un cylindre, & nous sçavons que cette surface est égale à la hauteur AB du cylindre multipliée par la circonference du rayon BN ou son égal CX.

257. PROPOSITION XLIII. *Si plusieurs lignes* AB, BC, CD, (Fig. 89.) *tournent autour d'un axe de mouvement* MN, *je dis que la surface qu'elles décriront en faisant une circonvolution entiere est égale au produit de la somme des lignes multipliée par la circonference que leur centre de gravité décrira autour de l'axe de mouvement.*

Concevons que les lignes AB, BC, CD soient trois leviers chargés de poids égaux dans tous leurs points. Il est clair que le centre d'équilibre des poids qui sont sur le levier AB, sera sur le point de milieu H, & que par conséquent la somme des forces de tous ces poids en tournant autour de MN sera égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient tous transportés en H & qu'ils tournassent autour de MN. Par la même raison, la somme des forces des poids qui sont sur le levier BC sera égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient transportés à leur centre E d'équilibre sur ce levier, & la somme des forces des poids qui sont sur le levier CD sera égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient transportés à leur centre F d'équilibre sur ce levier. Concevant donc que tous les poids qui sont sur le levier AB soient transportés en H, & ceux qui sont sur le levier BC soient transportés en E, & menant la ligne HE, la force de ces poids mis les uns en H & les autres en E, sera égale à celle qu'ils auroient s'ils étoient tous transportés à leur centre d'équilibre R sur le levier HE, & par un semblable raisonnement on trouvera que tous les poids des leviers AB, BC étant transportés en R, & tous les poids du levier CD étant transportés à leur centre F d'équilibre sur ce levier, la somme des forces des poids mis en R & en F sera égale à celle que tous les poids auroient s'ils étoient transportés au point P qui est leur centre d'équilibre commun; ainsi tous les poids transportés en leurs premieres places auroient autant de force en tournant autour de MN que si on les transportoit tous en P, & qu'on les fît tourner autour de MN.

Mais la somme des forces des corps mis en leur place est la

somme des produits de chaque corps par sa vitesse ou par la circonference qu'il décrit, & la force des poids transportés en P est la somme des produits de tous les poids multipliés par la circonference que décrit le centre commun d'équilibre P; donc la somme des produits des poids par les circonferences qu'ils décrivent chacun en leur place est égale à la somme des poids multipliée par la circonference que décrit le centre d'équilibre commun P autour de l'axe de mouvement MN.

Or les points qui composent les trois lignes AB, BC, CD, sont entr'eux comme les poids, puisqu'ils sont tous égaux entr'eux; donc la somme des produits de ces points par les circonferences qu'ils décrivent chacun en sa place, ce qui n'est autre chose que la somme même des circonferences, est égale à la somme des points, c'est-à-dire aux trois lignes AB, BC, CD, multipliées par la circonference que décrit le centre de gravité commun P.

258. Corollaire. Il suit de-là que si un plan ABCD tourne autour de l'un de ses côtés AD & fait une révolution entiere, on connoîtra la surface du solide qu'il décrira en multipliant les trois lignes AB, BC, CD par la circonference que leur centre de gravité P décrit autour de AD.

Et si un plan ABCD, (*Fig.* 90.) tourne autour d'un axe MN qui n'est aucun des côtés de la Figure, on connoîtra la surface du solide décrit par la circonvolution entiere en multipliant les quatre lignes AB, BC, CD, AD par la circonference que décrit leur centre de gravité autour de MN.

La difference qui se trouve entre la Figure 89 & la Figure 90, c'est que dans la premiere le côté AD étant l'axe de mouvement ne décrit aucune surface, & que par conséquent la surface du solide décrit par la circonvolution de la Figure, n'est composée que des trois surfaces que décrivent les trois autres lignes, au lieu que dans la Figure 90 toutes les quatre lignes AB, BC, CD, AD décrivent des surfaces qui appartiennent au solide, lequel se trouve avoir un vuide dans le milieu.

259. Proposition XLIV. *Si un Plan* ABCD (Fig. 91.) *tourne autour d'un axe de mouvement* MN, *le solide produit par une circonvolution entiere est égal au produit de ce plan multiplié par la circonference que son centre de gravité décrit autour de l'axe de mouvement.*

Le plan ABCD n'est autre chose que la somme de ses élémens

BC, RS, &c. concevant donc que chacun de ces élémens ou ligne BC, RS, &c. soit un levier chargé de poids égaux dans toutes ses parties, la force des poids du levier BC en tournant autour de MN sera égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient tous transportés à leur centre d'équilibre H sur ce levier; ainsi la somme des poids multipliés par la circonference que H décrit autour de MN sera égale à la somme des poids multipliés chacun par la circonference qu'ils décrivent chacun à leur place, & à cause que les points de la ligne BC sont entr'eux comme les poids, nous trouverons que la somme des points multipliés par la circonference que décrit le point H, c'est-à-dire la ligne BC multipliée par cette circonference est égale à la somme des mêmes points multipliés par les circonferences qu'ils décrivent chacun en leur place, c'est-à-dire à la somme des circonferences, & par conséquent à la surface que la ligne BC décrit en tournant autour de MN.

Par la même raison, la somme des forces des poids qui sont sur la ligne RS sera égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient mis à leur centre d'équilibre L sur cette ligne, & la ligne RS multipliée par la circonference que le point L décrit autour de MN sera égale à la surface composée de toutes les circonferences que ses points décriront, c'est-à-dire à la surface que la ligne RS décrira en tournant autour de MN, & ainsi des autres.

Supposant donc que tous les poids qui sont sur BC ne fussent qu'un seul poids mis en H, que tous ceux qui sont sur RS ne fussent qu'un seul poids mis en L, & ainsi de suite, tous les poids H, L, F, &c. seront entr'eux comme les lignes BC, RS, PQ, &c. puisque la somme des poids mis en H sera égale à la somme des poids de la ligne BC, de même que la ligne BC est égale à la somme de ses points, que le poids mis en L sera égal à la somme des poids de la ligne RS, de même que la ligne RS est égale à la somme de ses points, & ainsi de suite.

Or les poids mis en H, L, F, &c. auront un centre d'équilibre que je suppose être le point X; ainsi la somme des poids H, L, F, &c. multipliée par la circonference que le point X décrit autour de MN sera égale à la somme des produits des mêmes poids par les circonferences qu'ils décrivent en leurs places H, L, F, &c. ainsi à cause que les lignes BC, RS, PQ, &c. sont en même raison que les poids H, L, F, &c. la somme de ces lignes multipliée par la circonference que le point X décrit sera

égale à la ſomme des mêmes lignes multipliées par les circonférences que les points H, L, F, &c. décrivent. Or, la ſomme des lignes n'eſt autre choſe que le plan ABCD, & la ſomme des lignes multipliées par les circonférences que les points H, L, F, &c. décrivent, n'eſt autre choſe que la ſomme des ſurfaces que ces lignes décrivent autour de MN; donc le plan ABCD multiplié par la circonférence que décrit le point X eſt égal à la ſomme des ſurfaces décrites par ſes élemens, c'eſt-à-dire au ſolide que le plan ABCD décrit en tournant autour de MN.

260. Corollaire. Si le plan ABCD ne faiſoit que la moitié, le tiers ou le quart, &c. de ſa circonvolution, le ſolide décrit ne ſeroit que la moitié, le tiers ou le quart du produit du plan ABCD multiplié par la circonférence que X décriroit dans une circonvolution entiere. Car les poids mis ſur tous les points des lignes BC, RS, &c. ne décriroient que la moitié le tiers ou le quart de leurs circonférences, de même que leurs centres d'équilibre H, L, F, &c. ſur ces lignes; de façon que tous les poids de la ligne BC multipliés par la moitié, le tiers ou le quart de leurs circonférences ſeroient égaux à la ſomme des poids mis au centre H d'équilibre multipliée par la moitié, le tiers ou le quart de la circonférence que le point H décriroit, & par conſéquent la ligne BC multipliée par la moitié, le tiers ou le quart de la circonférence décrite par H ſeroit égale à la ſomme des produits de ſes points multipliés par la moitié, le tiers ou le quart de leurs circonférences, c'eſt-à-dire à la moitié, au tiers ou au quart de la ſomme des circonférences ou de la ſurface que la ligne BC décriroit, & la même choſe arriveroit à l'égard des autres lignes, d'où il eſt aiſé de conclure que la ſomme des lignes, c'eſt-à-dire le plan ABCD multiplié par la moitié, le tiers ou le quart de la circonférence que leur centre commun de gravité X décriroit autour de MN ſeroit égale à la ſomme des produits des mêmes lignes multipliées chacune par la moitié, le tiers ou le quart des circonférences que leurs centres particuliers de gravité H, L, F, &c. décriroient.

261. Corollaire II. Il ſuit de-là que ſi l'on connoît la valeur d'un plan ABCD qui tourne autour d'un axe de mouvement MN, & la diſtance de ſon centre de gravité X à l'axe de mouvement, on connoîtra toujours non-ſeulement le ſolide que ce plan décrit pendant une circonvolution entiere, mais encore celui qu'il décrit pendant la moitié, le tiers, le quart, &c. de ſa cir-

convolution ; car la distance du point X à l'axe MN étant connue, on peut aisément connoître la circonférence que ce point décrit.

262. PROPOSITION XLV. *Si un solide* ABCDEF (Fig. 92.) *est décrit par la circonvolution d'un plan* ABCD *autour d'un axe de mouvement* MN, *on peut toujours trouver un Prisme tronqué dont la base soit égale & semblable au plan* ABCD, *& qui soit égal au plan* ABCDEF.

Je prens une base *abcd* égale & semblable au plan ABCD; ainsi si cette base tournoit autour de la ligne *mn* semblablement posée à l'égard de ce plan comme MN l'est à l'égard du plan ABCD, elle décriroit un solide égal & semblable au solide ABCDEF ; & menant dans la base *abcd* les élemens *ba*, *gf*, *hi*, &c. perpendiculaires sur *mn*, j'observe que ceux de ces élemens qui iroient aboutir à la droite *mn* décriroient des cercles en tournant autour de cette ligne, que ceux tels que *pq* qui n'aboutiroient pas sur *mn* décriroient des couronnes, car prolongeant *pq* en *r*, la droite *pr* décriroit un cercle duquel il faudroit retrancher le cercle décrit par la partie *qr* extérieure, ce qui donneroit la couronne décrite par *pq*, & ainsi des autres ; & qu'enfin le solide décrit par la circonvolution du plan *abcd* seroit égal à la somme des cercles & des couronnes, que les élemens de ce plan décriroient autour de *mn*.

Maintenant je laisse le plan *abcd* immobile dans sa position horizontale, & sur l'élement *ba*, j'éleve perpendiculairement au plan un triangle rectangle *ab*P dont la base est l'élement *ba*, & la hauteur *b*P est égale à la circonférence que l'élement *ba* décriroit en tournant autour de *mn*. Ainsi le triangle *ab*P est égal au cercle que l'élement *ba* décriroit ; car on sçait qu'un triangle rectangle, dont l'un des deux côtés perpendiculaires est égal au rayon d'un cercle, & l'autre est égal à la circonférence, on sçait, dis-je, qu'un tel triangle est égal au cercle. Je fais la même chose sur *ef*, *hi*, &c. qui aboutissent à la ligne *mn*, & par conséquent j'ai autant de triangles rectangles que ces élemens décrivent des cercles, & chaque triangle est égal au cercle correspondant.

Quant aux élemens tels que *pq* qui n'aboutissent point sur *mn*, je les prolonge jusqu'à ce qu'ils coupent *mn*. Je construis sur *pr* un triangle rectangle *prt* ayant pour base *pr*, & pour hauteur la circonférence que *rp* décriroit autour de *mn*, & sur la partie extérieure *qr* un triangle rectangle *qrf* ayant pour base *qr*, & pour hauteur

hauteur la circonférence que *qr* décriroit autour de *mn*. Ainsi les triangles *ptr*, *qrs* étant semblables à cause que leurs bases sont à leurs hauteurs comme le rayon du cercle est à la circonférence, l'hypothenuse *sr* du triangle *qsr* sera partie de l'hypothenuse *tr* du triangle *tpr*; & par conséquent du triangle *tpr* égal au cercle que *pr* décriroit, retranchant le triangle *qsr* égal au cercle que *qr* décriroit, le trapezoïde restant *ptsq* est égal à la couronne que *pq* décriroit autour de *mn*, & faisant la même chose à l'égard des autres élemens tels que *pq*; j'aurai autant de trapezoïdes que ces élemens décriroient de couronnes, & chaque trapezoïdes sera égal à chaque couronne.

Puis donc que le solide décrit par la circonvolution de ABÇD autour de MN, n'est autre chose que la somme des cercles & des couronnes que ses élemens décrivent autour de MN, & que la somme des triangles rectangles, & des trapezoïdes faits sur les élemens de *abcd* ou ABCD est égale à la somme des cercles & des couronnes; il s'ensuit que le solide formé par les cercles & les couronnes est égal au solide formé par les triangles & les trapezoïdes; mais le solide formé par les triangles & les trapezoïdes est un prisme tronqué dont la base est égale au plan ABCD; car les hauteurs des triangles & des trapezoïdes étant perpendiculaires autour du circuit *abcd*, forment une surface prismatique, & les hypothenuses P*a*, *og*, &c. des triangles rectangles jointes aux parties d'hypothenuses *ts* des trapezoïdes étant également inclinées sur la base *abcd*, à cause que tous les triangles sont semblables, forment un plan qui tronque obliquement la surface prismatique. Donc le solide décrit par la circonvolution du plan autour de MN est égal à un prisme fait sur la base *abcd*.

Si le plan ABCD (*Fig.* 93.) tournoit autour d'un axe MN éloigné de sa base, alors tous les élemens *fc*, *hd*, &c. du plan *abcd* décriroient en tournant autour de *mn* des couronnes, & mettant au lieu des couronnes des trapezoïdes égaux à ces couronnes, & perpendiculaires aux élemens, on auroit un prisme tronqué *abcdrgpn* égal au solide décrit par la circonvolution du plan *abcd* autour de *mn*, mais dont le plan incliné tronqueroit obliquement tous les côtés du prisme, & ne passeroit point par l'extrêmité de la base comme le précédent.

263. PROPOSITION XLVI. *Tout prisme droit tronqué par un plan incliné est ou égal au solide que sa base décriroit en tournant autour de la ligne par laquelle le plan incliné coupe la base prolongée s'il le faut, ou il est moindre ou il est plus grand.*

Soit le prisme ABCDQP (*Fig. 94.*) tronqué par le plan PQDA qui passe par le côté AD de sa base ABCD. Je mene dans sa base les élemens BA, *fg*, &c. perpendiculaires sur le côté AD, autour duquel je conçois que la base ABCD tourne. Ainsi tous les élemens de cette base décriront des cercles & des couronnes, s'il s'en trouve quelques-uns qui n'aboutissent pas à l'axe de mouvement *mn* ; mettant donc au lieu des cercles & des couronnes des triangles rectangles, & des trapezoïdes égaux aux cercles & aux couronnes, j'aurai un prisme tronqué par un plan oblique qui passera par *mn*. Or, si ce plan formé par les hypothenuses & parties d'hypothenuses est autant incliné sur la base ABCD que le plan PADQ, ces deux plans n'en feront qu'un, & le prisme formé par les triangles & les trapezoïdes sera égal au prisme ABCDQP. Mais si ce plan est plus incliné que le plan PADQ, tel qu'est le plan RADS, le prisme ABCDSR formé par les triangles & les trapezoïdes, sera moindre que le prisme ABCDQP, ce qui est évident, & si ce plan est moins incliné que le plan ADQP, il est encore clair que le prisme formé par les triangles & les trapezoïdes, sera plus grand que le prisme ABCDQP.

Et l'on doit dire la même chose si le plan incliné PQHV (*Fig. 95.*) du prisme tronqué ABCDVQPH coupoit la base prolongée en une ligne MN, ce qui n'a pas besoin de démonstration.

264. PROPOSITION XLVII. *Tout prisme droit tronqué par un plan oblique à l'horizon est égal au produit de sa base multipliée par la perpendiculaire élevée sur le centre de gravité de cette base, & comprise entre la base & le plan tronquant.*

Soit le prisme ABCDQP (*Fig. 96.*) tronqué par un plan incliné PQDA qui passe par le côté AD de sa base, & dont je suppose que le centre de gravité de la base ABCD soit le point X. Si ce prisme est égal au solide que sa base décriroit en tournant autour de AC, tous les triangles & les trapezoïdes élevés perpendiculairement sur les élemens de sa base perpendiculaire à AD seront égaux chacun à chacun aux cercles & couronnes que ces élemens décriroient en tournant autour de AD, & toutes les hauteurs de ces triangles seront égales aux circonférences des cercles & des couronnes chacune à chacune, & le triangle rectangle ZXO élevé perpendiculairement sur la distance XO du centre de gravité à l'axe AD étant semblable aux autres triangles, sera aussi égal au cercle que XO décriroit, & sa hauteur XZ égale à la circonférence de ce cercle ; or, le solide décrit

par la circonvolution de la base, c'est-à-dire la somme des cercles & des couronnes décrites par les élemens de la base seroit égale à la base multipliée par la circonférence de XO, c'est-à-dire par la circonférence que le centre X décriroit; donc la somme des triangles & des trapezoïdes, c'est-à-dire le prisme doit être aussi égal à la même base multipliée par la droite XZ égale à la circonférence que X décriroit, c'est-à-dire par la perpendiculaire élevée sur le centre de gravité X & comprise entre la base & le plan incliné.

Si le prisme ABCDQP est moindre que le solide que sa base décriroit en tournant autour de AD, il ne sera pas moins vrai que tous les triangles PAB, *ofg*, &c. dont il est composé, seront semblables à cause que le plan incliné fait partout un même angle avec la base; ainsi l'on auroit PB. BA :: *of*. *fg*; c'est-à-dire que si la hauteur PB de l'un n'est, par exemple, que la moitié de la circonférence que sa base BA décriroit, la hauteur *of* de l'autre n'est aussi que la moitié de la circonférence que sa base *fg* décriroit, & ainsi des autres; d'où il suit que tous les triangles rectangles qu'on feroit sur les mêmes bases BA, *gf* égaux aux cercles que ces bases décriroient, auroient les hauteurs doubles des hauteurs BP, *of*, &c. & seroient par conséquent doubles des triangles BPA, *ofg* dont le prisme est composé en parties.

Quant aux trapezoïdes que le prisme comprend, tels que le trapezoïde *fnrt*, il est clair que ce trapezoïde n'étant autre chose que le triangle *nfu*, moins le triangle *rtu* ne doit être aussi que la moitié de la couronne que l'élement *ft* décriroit en tournant autour de AD, car le triangle *nfu* n'ayant que la moitié de la hauteur de celui qui seroit fait sur la même base *fu*, & qui seroit égal au cercle que *fu* décriroit autour de AD, n'est aussi que la moitié de ce cercle, & par la même raison le triangle *rtu* n'est que la moitié de celui qui seroit fait sur la même base *tu*, & qui seroit égal au cercle que *tu* décriroit; ainsi le trapezoïde *nrts*, c'est-à-dire le triangle *nfu* moins le triangle *rtu* ne doit être que la moitié du trapezoïde qu'on auroit en retranchant du triangle égal au cercle de *fu*, le triangle égal au cercle de *tu*; enfin dans le triangle XZO fait sur la distance XO du centre X de gravité à l'axe AD de mouvement, la hauteur XZ n'est aussi que la moitié de la circonférence que XO décriroit.

Puis donc que tous les triangles & les trapezoïdes du prisme ABCDPQ ne sont que les moitiés des cercles & des couronnes

qui composeroient le solide formé par la circonvolution de la base, selon la supposition que nous avons faite; il s'ensuit que le prisme ne doit être que la moitié de ce solide; or, le solide fait par la circonvolution de la base est égal au produit de la base par la circonférence que X décriroit; donc notre prisme doit être égal au produit de la base par la moitié de cette circonférence, & par conséquent par la perpendiculaire XZ élevée sur le centre de gravité, & comprise entre la base & le plan incliné.

On prouvera aisément la même chose si le prime BADCQP est plus grand que le solide que sa base décriroit en tournant autour de AD.

La même chose se prouvera encore si le plan incliné du prime coupoit tous les côtés du prisme, & ne rencontroit la base qu'après l'avoir prolongée en MN (*Fig.* 95.).

265. Proposition XLVIII. *La surface d'un prisme tronqué est égale à la somme des lignes qui servent de bases aux parties de cette surface, multipliée par la perpendiculaire élevée sur le centre commun d'équilibre de ces lignes, & comprise entre la base & le plan incliné.*

Soit le prisme tronqué ABCDQP (*Fig.* 97.); dont les lignes AB, BC, CD servent de base à la surface, car la ligne AD n'en soutient aucune partie, puisque le plan incliné passe par cette ligne. Supposons aussi que le centre de gravité commun aux trois lignes AB, BC, CD, soit le point X, lequel est différent du centre de gravité de la base ABCD.

Le prisme ABCDQP est ou égal, ou moindre, ou plus grand que le solide que sa base décriroit en tournant autour de AD. Supposons-le d'abord égal, sa surface n'est autre chose que la somme des lignes droites élevées perpendiculairement sur la base, de tous les points des lignes AB, BC, CD, & terminées au plan incliné qui tronque le prisme, & ces lignes droites sont égales chacune à chacune aux circonférences que ces points décriroient en tournant autour de AD; car menant de ces points B, *f*, &c. des droites BA, *fg*, &c. perpendiculaires sur AD, & des points A, *g*, &c. des droites AP, *go*, &c. qui se terminent aux extrêmités P, *o* des perpendiculaires, & qui par conséquent seront sur le plan incliné APQD, les triangles semblables BPA, *gfo*, &c. seront égaux aux cercles que leurs bases BP, *fg*, &c. décriroient, & les droites BP, *fo*, &c. égales aux circonférences, & ainsi des autres. Ainsi la surface du prisme est composée d'autant de lignes droites qu'il y a de circonférences qui composeroient la surface

du solide décrit par la circonvolution de la base, & chaque ligne droite étant égale à chaque circonférence, la surface du prisme est égale à la surface du solide décrit par la circonvolution de la base; mais la surface de ce solide est égale à la somme des lignes AB, BC, CD multipliées par la circonférence que leur centre de gravité X décriroit; donc la surface du prisme est égale à la somme des mêmes lignes multipliées par la hauteur XZ égale à la circonférence que X décriroit, à cause que dans le triangle rectangle ZXO semblable aux autres triangles PBA, &c. la hauteur est égale à la circonférence dont la base XO seroit le rayon.

Maintenant si le prisme est moindre que le solide produit par la circonvolution de la base, le plan incliné PQDA, est par conséquent plus incliné sur la base que le plan incliné du prisme qui seroit égal au solide produit par la circonvolution de la base, & à cause que tous les triangles rectangles BPO, *ofg*, XZO, &c. sont tous semblables, leurs hauteurs BP, *fo*, XZ, &c. auront toutes même rapport à leurs bases BA, *fg*, XO, &c. supposant donc que la hauteur BP ne soit que la moitié de la circonférence que la base BA décriroit, toutes les autres hauteurs ne sont aussi que la moitié des circonférences de leurs bases, & partant la surface du prisme est égale à la moitié de la surface du solide décrit par la circonvolution de la base. Or, la surface de ce solide est égale à la somme des lignes AB, BC, CD, par la circonférence que leur centre de gravité X décrit; donc la surface du prisme doit être égale à la somme des mêmes lignes multipliée par la droite, XZ, laquelle, dans la supposition que nous avons faite, n'est que la moitié de la circonférence décrite par le point X.

Et on prouveroit la même chose si le prime étoit plus grand que le solide décrit par la circonvolution.

Si le plan incliné PSRQ (*Fig.* 98.) du prisme ABCDRSPQ coupoit tous les côtés du prisme avant de couper la base en MN, alors les quatre lignes AB, BC, CD, DA soutiendroient chacune une portion de la surface, & l'on prouveroit, comme ci-dessus, que la surface du prisme est égale à la somme de ces quatre lignes multipliée par la perpendiculaire élevée sur leur centre de gravité commun X, & comprise entre la base & le plan incliné.

Remarque. La surface d'un prisme tronqué étant trouvée, si on lui ajoute la base & le plan incliné, on aura la surface totale.

266. Proposition XLIX. *Tout prisme incliné* ABCDEH

(Fig. 99.) *& tronqué par un plan incliné à sa base, est égal à un prisme droit de même base, & dont toutes les hauteurs seroient égales chacune à chacune à toutes les hauteurs du prisme incliné.*

Je prens un plan *abcd* égal & semblable au plan ABCD ; de la base, j'éleve en *b* une droite *bh* perpendiculaire sur le plan *abcd*, & égale à la hauteur HY de l'aréte BH, c'est-à-dire à la perpendiculaire menée du point H sur la base ABCD prolongée ; j'éleve de même en *c* la droite *ce* perpendiculaire sur le plan *abcd*, & égale à la hauteur EZ de l'aréte CE, & menant les droites *ha*, *ed*, j'ai un prisme droit tronqué *abcdeh*, qui est égal au prisme incliné tronqué ABCDEH. Ce que je prouve ainsi.

Je mene dans les deux bases ABCD, *abcd* les élemens AB, RQ, &c. *ab*, *rq*, &c. perpendiculaires sur les côtés égaux AD, *ad*, par lesquels passent les plans inclinés AHED, *ahed*. Je conçois que sur ces élemens soient élevés des plans perpendiculaires aux bases ABCD, *abcd* ; ceux de ces plans qui sont sur les élemens AB, RQ, &c. *ab*, *rq*, &c. qui aboutissent aux côtés égaux AD, *ad* seront des triangles AHB, RPQ, &c. *ahb*, *rpq*, &c. & ceux qui seront sur les élemens tels que TS, &c. *ts*, &c. qui n'aboutissent pas aux côtés égaux AD, *ad*, seront des trapezoïdes TXVS, &c. *txus*, &c. & dans l'un & l'autre prisme il y aura un même nombre de triangles & de trapezoïdes, dont les bases AB, RQ, TS, &c. seront égales chacune à chacune aux bases *ab*, *rq*, *ts*, &c.

Maintenant les deux triangles AHB, *ahb* sont égaux à cause de la base AB égale à la base *ab*, & de la hauteur HY égale à la hauteur *hb* ; or, le triangle AHB est semblable à tous les triangles RQP, &c. faits sur les élemens RQ, &c. qui aboutissent sur AD, & le triangle *ahb* est semblable à tous les triangles *rqp*, &c. faits sur les élemens *rq*, &c. qui aboutissent sur *ad*, comparant donc le triangle AHB, avec l'un de ses semblables RQP, du sommet duquel nous abbaisserons la perpendiculaire PL sur le plan de la base ABCD pour avoir la hauteur de ce triangle, nous aurons AB, RQ :: HY, PL, c'est-à-dire les bases de ces triangles sont entr'elles comme les hauteurs, & comparant de même le triangle *ahb* avec son semblable *rqp* dont la base *rq* est égale à la base du triangle RQP, nous aurons *ab*. *rq* :: *bh*. *pq* ; or, *ab* = AB, & *rq* = RQ ; donc AB. RQ :: *hb*. *pq*, & partant HY. PL :: *hb*. *pq* ; mais HY = *hb*, donc PL = *pq*, & par conséquent le triangle RQP, & le triangle *rqp* sont égaux, puisqu'ils ont les bases RQ,

rq égales, & les hauteurs PL, *pq* aussi égales. Et la même chose arrivera de tous les autres triangles.

Les trapezoïdes TXVS, &c. *txus*, &c. faits par les élemens TS, &c. *ts*, &c. qui n'aboutissent pas aux côtés égaux AD, *ad*, ne sont autre chose que les triangles NVS, *nus* faits par les prolongemens de leurs côtés non-paralelles, moins les petits triangles NXT, *nxt*, c'est-à-dire TXVS = NVS — NTX, & *txus* = *nus* — *ntx*, or, les triangles NVS, NTX sont semblables au triangle AHB, & les triangles *nus*, *ntx* sont semblables au triangle *ahb*; donc nous démontrerons comme auparavant que NVS = *nus*, NTX = *ntx*, & par conséquent NVS — NTX = *nus* — *ntx* ou TXVS = *txus*.

Donc puisqu'il y a un même nombre de triangles & de trapezoïdes dans l'un & l'autre prisme, & que chaque triangle est égal à chaque triangle, & chaque trapezoïde à chaque trapezoïde, les deux prismes sont parfaitement égaux.

267. De-là on tire une maniere facile de mesurer les prismes inclinés tronqués, car puisque le prisme incliné tronqué ABCDEF (*Fig.* 100.) est égal au prisme droit tronqué *abcdef*, dont toutes les hauteurs sont égales aux hauteurs du prisme incliné, & que le prisme droit est égal au produit de sa base par la perpendiculaire *xt* élevée sur son centre de gravité, & comprise entre les deux bases, le prisme incliné sera égal au même produit; or dans le prisme droit les triangles *bcf*, *rxt*, étant semblables on trouve la perpendiculaire *tx* en faisant *bc*. *cf* :: *rx*. *xt*, & *cf* est la même chose que la hauteur FQ du triangle BCF du prisme incliné, de même que *bc* est égal à BC, & *rx* = RX; donc après avoir pris la base BC, & la hauteur FQ de l'un des triangles du prisme incliné, il faut chercher une quatriéme proportionnelle à BC, FQ, & à la distance RX du centre de gravité X de la base au côté BA, par lequel passe le plan incliné, & cette quatriéme proportionnelle sera la quantité par laquelle on multipliera la base ABCD pour avoir la valeur du prisme tronqué.

268. Il faut prendre garde ici que quoique le prisme droit *abcdef* (*Fig.* 100.) soit égal au prisme incliné ABCDEF, cependant la surface du prisme droit n'est pas égale à la surface du prisme incliné par la raison qu'il se trouve dans la surface du prisme incliné des plans inclinés qui font partie de sa surface, & qui ne sont pas égaux aux plans droits du prisme droit qui font partie de sa surface, & qu'ainsi on ne peut pas dire que la surface du prisme incliné

eſt égale à la ſomme des lignes qui la ſoutiennent, multipliée par la perpendiculaire élevée ſur le centre de gravité de la baſe de cette ſurface, & compriſe entre la baſe & le plan incliné du priſme droit, de même qu'on le dit de la ſurface du priſme droit, c'eſt pourquoi dans ces cas, il faut, pour avoir la ſurface du priſme incliné, chercher les valeurs de toutes ſes faces à part.

269. REMARQUE. Tout ce que nous venons de dire fait voir de quelle fécondité eſt pour la Géométrie, la méthode des centres de gravité, puiſque par la connoiſſance d'un plan quelconque qui tourne autour d'un axe de mouvement, & de la circonférence que décrit ſon centre de gravité, on peut non-ſeulement connoître le ſolide que ce corps décrit, mais encore un priſme quelconque tronqué droit ou incliné fait ſur ce plan, & dont le plan incliné paſſeroit par l'axe de mouvement, comme auſſi par la connoiſſance des lignes qui décrivent la ſurface du ſolide, & de la circonférence que le centre de gravité décrit; on peut connoître la ſurface du ſolide, & celle de tous les priſmes droits tronqués faits ſur la même baſe, & dont le plan incliné paſſeroit par l'axe de mouvement. Mais la difficulté conſiſte à trouver le centre de gravité des différens plans, & des différentes lignes qui compoſent le circuit d'une figure, & c'eſt à quoi nous allons maintenant nous appliquer.

270. *Le centre de gravité d'une ligne* AB (Fig. 101.) *eſt ſur le milieu* C *de cette ligne.* Car ſi nous concevons que cette ligne ſoit chargée dans tous ſes points de poids tous égaux, il n'y aura pas plus de poids à la gauche de C qu'à ſa droite, & par conſéquent tous ſes poids ſeront en équilibre autour du point C.

271. Pour trouver le centre de gravité de pluſieurs lignes AB, BD, DH, je joins les centres de gravité C, E des deux premieres par la droite CE, je coupe cette droite en deux parties CL, LE réciproques aux deux lignes, c'eſt-à-dire je fais CL. LE :: BD. BA, je mets CL du côté de BA, & LE du côté de BD, & le point L eſt le centre d'équilibre des deux lignes AB, BD. Du point L par le milieu G du centre de gravité de la ligne HD, je mene la droite LG, je coupe cette droite en deux parties réciproques à la ſomme des deux AB, BD, & à la droite HD, c'eſt-à-dire je fais LM. MG :: HD. AB + BD, je mets LM du côté de L & MG du côté de HD, & le point M eſt le centre commun d'équilibre des trois lignes AB, BD, DH.

Car ſi nous concevons que les trois lignes ſoient chargées dans tous

tous leurs points de poids égaux, les centres de gravité ſur chacune de ces lignes ſeront les points C, E, G milieux de ces lignes; conſidérant donc CE comme un levier, tous les poids de la ligne AB peſeront autant ſur ce levier que s'ils étoient mis à leur centre d'équilibre C, & tous les poids de la ligne BD peſeront autant ſur ce levier que s'ils étoient mis à leur centre d'équilibre E; or, tous les poids de la ligne AB étant mis en C, où ils ne feront qu'un ſeul poids, & tous ceux de la ligne AD étant mis en E pour n'y faire qu'un ſeul poids, il eſt clair que le poids C ſera au poids E comme la ligne AB ſera à la ligne BD; car le poids C eſt compoſé d'autant de poids égaux que la ligne AB eſt compoſée de points, & le poids E eſt compoſé d'autant de poids égaux que la ligne BD eſt compoſée de points; ainſi le centre commun de gravité des poids C, E ſur le levier, CE ſera auſſi le point L, puiſque les diſtances CL, LE ſeront réciproques aux poids E, C de même qu'elles le ſont aux lignes BD, AB.

Maintenant conſidérant la droite LG comme un levier, les poids C, E peſeront autant ſur ce levier que s'ils étoient mis à leur centre d'équilibre L, & tous les poids qui ſont ſur le levier HD peſeront autant ſur le levier LG que s'ils étoient tous mis à leur centre d'équilibre G pour n'y faire qu'un ſeul poids, ainſi les deux poids C, E mis en L pour n'y faire qu'un ſeul poids, ſeroient au poids G comme la ſomme des deux lignes AB, BD eſt à la ligne HD, & par conſéquent leur centre commun de gravité ſeroit le point M, puiſque les diſtances LM, MG ſeroient réciproques au poids G & au poids L compoſé des deux poids C, E.

272. *Le centre de gravité de tout rectangle & de tout paralellogramme* ABCD (Fig. 102.) *eſt ſur le milieu* X *de la droite* EH *qui coupe deux côtés oppoſés* BC, AD *chacun en deux également aux points* E, H.

Tous les élemens de la figure paralelles aux côtés BC, AD ſont tous coupés en deux également par la ligne EH; ainſi tous leurs centres de gravité ſont ſur cette ligne, & par conſéquent on peut regarder ces élemens comme autant de poids égaux attachés à tous les points de la ligne EH; or, le centre de gravité commun de tous ces poids égaux eſt ſur le milieu X de la ligne EH, à cauſe qu'il y en a autant de part & d'autre de X; donc le centre de gravité de tous les élemens, & par conſéquent celui du rectangle ou du paralellogramme, eſt le point X.

273. *Le centre de gravité* X *d'un triangle* ABC (Fig. 103.) *est éloigné de l'un des angles tel qu'on voudra* A *d'une quantité* AX *égale aux deux tiers de la ligne* AM *menée du sommet* A *sur le milieu* M *du côté* BC *opposé à cet angle.*

A cause que la ligne AM coupe le côté BC en deux également en M, tous les élemens du triangle paralelle à B sont coupés chacun en deux également, & par conséquent tous leurs centres étant sur la ligne AM, leur centre de gravité commun, c'est-à-dire le centre de gravité du triangle est sur cette ligne AM. Je mene d'un autre angle B une droite BR sur le milieu du côté opposé AE, & tous les élemens du triangle paralelles au côté AC étant aussi divisés chacun en deux également par AR, leur centre de gravité commun ou le centre de gravité du triangle doit être aussi sur AR; or, nous venons de voir que ce centre est sur AM, donc il faut necessairement qu'il soit sur le point X où les deux lignes AM, BR s'entrecoupent.

Du point R, je mene RN paralelle à BC & qui coupe AM en O; dans les triangles semblables AMC, AOR, nous avons MC. OR :: AC. AR, mais $AC = 2AR$; donc $MC = 2OR$ ou $OR = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2}MB$; or, les triangles semblables BXM, OXR donnent BM. RO :: MX. OX, donc BM. $\frac{1}{2}$MB :: MX. OX, & par conséquent $OX = \frac{1}{2}MX$, & $OX = \frac{1}{3}OM$; mais à cause des triangles semblables ACM, ARO, & de $AC = 2AR$, nous avons $AM = 2AO = 2OM$, & par conséquent $AO = OM$; ainsi OX étant le tiers de OM ou de AO n'est que le sixiéme de la ligne entiere AM, & ce sixiéme étant ajouté à la moitié AO de AM fait les deux tiers de AM; donc le centre de gravité X est éloigné des deux tiers de AM.

274. Pour trouver le centre de gravité d'un trapezoïde ou d'un trapeze ABCD (*Fig.* 104.), je mene la diagonale BD qui divise la figure en deux triangles ABD, DBC; je mene dans le triangle ABD de l'un des angles ABD la droite BM sur le milieu du côté opposé AD, & sur cette ligne, je prens BH égal aux deux tiers de BM; ainsi le centre de gravité du triangle ABD est en H. Je mene dans le triangle BDC de l'un des angles DBC la droite BN sur le milieu du côté opposé DC, & prenant sur BN la partie BP égale à ses deux tiers, le centre de gravité du triangle DBC est le point P; je joins les deux centres de gravité H, P par la droite HP, & considérant cette ligne comme un levier auquel sont attachés deux poids en H & P égaux aux deux triangles; je

partage cette ligne en deux parties HS, SP réciproques aux poids ou aux triangles, c'eſt-à-dire je fais HS. SP :: BDC. BAD, & le point S eſt le centre commun des deux triangles, & par conſéquent le centre de gravité du trapezoïde, ce qui eſt évident par les principes établis ci-deſſus.

275. Pour trouver le centre de gravité d'une figure irréguliere ABCDE (*Fig.* 105.) qui a plus de quatre côtés, je diviſe la figure en triangles par des lignes menées de l'un des angles B à tous les autres où je puis en mener. Je cherche les centres de gravité H, P, S de ces triangles; menant enſuite la droite HP que je conſidére comme un levier ayant à ſes extrêmités H, P deux poids qui ſont entr'eux comme les triangles ABE, BED, je cherche leur centre de gravité commun R ſur ce levier; du point R, je mene la droite RS que je conſidére auſſi comme un levier ayant à ſon extrêmité R un poids égal à la ſomme des deux triangles ABE, BED, & en S un poids égal au triangle BDC, & cherchant ſur ce levier le centre Q d'équilibre des deux poids, le point Q eſt le centre de gravité de la figure, ce qui n'a plus beſoin de démonſtration.

276. *Le centre de gravité d'un polygone régulier eſt au centre de la figure.* Si le polygone eſt d'un nombre pair de côtés comme l'exagone ABCDE (*Fig.* 106.). Je mene de l'un de ſes angles D une droite DA à l'angle oppoſé A, & comme cette ligne diviſe le polygone en deux parties parfaitement égales, le centre de gravité de ces deux parties, c'eſt-à-dire de l'exagone, doit être ſur cette ligne. Je mene de même d'un autre angle E la droite EB à l'angle oppoſé, & par la raiſon que nous venons de dire, le centre de gravité de la figure doit être ſur cette ligne. Ainſi ce centre doit être néceſſairement ſur le point d'interſection O des deux lignes. Or, ce point, comme on ſait, eſt le centre de la figure. Donc, &c.

Si le polygone eſt d'un nombre impair de côtés, comme le pentagone ABCDE (*Fig.* 107.), je mene de l'un des angles D la droite DM ſur le milieu du côté oppoſé AB, & la figure étant diviſée en deux parties parfaitement égales, ſon centre de gravité eſt ſur cette ligne DM. Je mene d'un autre angle E la droite EN ſur le milieu du côté oppoſé BC, & par la même raiſon le centre de gravité de la figure eſt auſſi ſur cette ligne; donc ce centre eſt dans le point O où les deux lignes DM, EN ſe coupent, & ce point, comme on ſait, eſt le centre de la figure.

277. Donc le centre d'un cercle eſt ſon centre de gravité, puiſque le cercle eſt un polygone régulier d'une infinité de côtés.

278. *Le centre de gravité d'une parabole quarrée* ABC (Fig. 108.) *eſt ſur un point* S *de l'axe* BP *éloigné du ſommet d'une diſtance* BS *égale au trois cinquiémes de cet axe.*

Je mene les élemens ED, FG paralelles à la baſe AC, & tous ces élemens étant diviſés chacun en deux également par l'axe BP ont leurs centres de gravité ſur cet axe, & par conſéquent leurs centres de gravité commun, c'eſt-à-dire celui de la parabole eſt auſſi ſur cet axe; ainſi nous pouvons conſidérer ces lignes comme des poids qui ſeroient attachés à tous les points du levier BP, & ſuppoſant que ce levier tourne autour de la tangente MN au ſommet B, nous trouverons le centre de gravité commun, en multipliant chaque poids ou chaque ligne par ſa diſtance au point B, & diviſant la ſomme des produits par la ſomme des poids ou des lignes, ce qui nous donnera la diſtance du centre de gravité commun ou du centre de gravité de la parabole au point B (*N.* 246.)

Or, les moitiés des élemens ED, FG, &c. étant les ordonnées à l'axe BP, les quarrés de ces moitiés ſont entr'eux comme les abſciſſes BL, BO, &c. c'eſt-à-dire comme les diſtances des élemens au ſommet B de la parabole; & ces abſciſſes ou diſtances ſont entr'elles comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. à l'infini; donc les quarrés des moitiés des élemens, & par conſéquent les quarrés des élemens ED, FG, &c. ſont entr'eux comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. & leurs racines quarrées, c'eſt-à-dire les élemens ſont entr'eux comme les racines quarrées de ces nombres; c'eſt pourquoi les élemens forment une ſuite dont l'expoſant eſt $\frac{1}{2}$ par les principes de l'Arithmétique des Infinis, & les diſtances ou abſciſſes forment une ſuite 0. 1. 2. 3, &c. dont l'expoſant eſt 1; donc les produits des élemens par leurs diſtances formeront une nouvelle ſuite dont l'expoſant ſera la ſomme $\frac{1}{2}+1$ ou $\frac{3}{2}$ des deux expoſans, & la ſomme de ces produits ſera au dernier $AC \times PB$ multiplié par le nombre des termes PB, comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{3}{2}$ augmenté de l'unité, ou comme 1 à $\frac{3}{2}+1$, ou comme 1 à $\frac{5}{2}$ ou comme $\frac{2}{2}$ à $\frac{5}{2}$, ou enfin comme 2 à 5; c'eſt-à-dire que la ſomme des produits des élemens par leurs diſtances ſera $\frac{2}{5} AC \times \overline{PB}^2$. Or, la ſomme des élemens, c'eſt-à-dire la parabole eſt $\frac{2}{3} AC \times PB$, car nous ſçavons que la parabole eſt les $\frac{2}{3}$ du

rectangle circonscrit ou du produit de la base par la hauteur. Divisant donc $\frac{2}{5}$ AC×$\overline{PB}^2$ par $\frac{2}{3}$ AC×PB, le quotient $\frac{6}{10}$ BP ou $\frac{3}{5}$ PB sera la distance du centre de gravité de la parabole au sommet B.

279. Corollaire. Si l'on fait un semblable calcul par rapport aux premieres paraboles du 3e. degré, du 4e. du 5e. &c. c'est-à-dire à la parabole dont les cubes des élémens sont entr'eux comme les abscisses, à celle dont les quatriémes puissances des élémens sont entr'elles comme les abscisses, & ainsi de suite, on trouvera que le centre de gravité de toutes les premieres paraboles à commencer par la quarrée sont sur l'axe à une distance éloignée du sommet B des $\frac{3}{5}$ de l'axe, des $\frac{4}{7}$, des $\frac{5}{9}$, des $\frac{6}{11}$, des $\frac{7}{13}$, & ainsi de suite, de sorte que le centre de gravité dans ces paraboles approchera de plus en plus vers la moitié de l'axe, & n'y parviendra jamais.

280. Pour appliquer ceci à la pratique, cherchons la valeur du solide que décriroit la parabole ABC, (*Fig.* 109.) en tournant autour de la tangente MN au sommet. La parabole ABC étant les deux tiers du rectangle circonscrit AMND est donc $\frac{2}{3}$ AC×PB; & par conséquent, si nous multiplions cette parabole par la circonference que l'extrémité S de la distance BS de son centre de gravité décrira, laquelle distance est $\frac{3}{5}$ PB, nous aurons le solide décrit; or en nommant (BP la circonference que l'extrémité P de l'axe BP décriroit, la circonference que S décrira sera $\frac{3}{5}$ (BP, à cause que les deux circonferences sont entr'elles comme leurs rayons BP, BS; ainsi le solide sera $\frac{2}{3}$ AC×PB×$\frac{3}{5}$ (BP, ou $\frac{6}{15}$ AC×PB×(BP, ou enfin $\frac{2}{5}$ AC×PB×(BP, c'est-à-dire que le solide décrit par la circonvolution de la parabole autour de MN est égal aux $\frac{2}{5}$ d'un prisme qui auroit pour base le rectangle circonscrit AMNC, & pour hauteur une ligne égale à la circonference du cercle que la hauteur PB de ce rectangle décrit autour de MN.

Si la parabole est la premiere parabole du 3e degré, c'est-à-dire si les cubes de ses ordonnées sont entr'eux comme leurs abscisses, nous trouverons par les regles de l'Arithmétique des infinis que cette parabole est les $\frac{3}{4}$ du rectangle circonscrit, c'est-à-dire $\frac{3}{4}$ AC×BP, & comme la distance de son centre de gravité à la tangente est $\frac{4}{7}$ BP (*N.* 279.) la circonference du cercle que cette ligne décrira est $\frac{4}{7}$ (BP; donc le solide décrit par la circonvolu-

tion de la parabole autour de MN est $\frac{3}{4}$ AC × PB × $\frac{4}{7}$ (PB = $\frac{12}{28}$ AC × PB × (PB = $\frac{3}{7}$ AC × PB × (PB, c'est-à-dire le solide décrit par la circonvolution est égal aux $\frac{3}{7}$ du rectangle circonscrit multiplié par la circonference du cercle que décrit la hauteur PB de ce rectangle.

Et on trouvera de la même façon que les solides formés par la circonvolution des premieres paraboles du 4e. degré, du 5e. &c. sont $\frac{4}{9}$ AB × PB × (PB, $\frac{5}{11}$ AC × PB × (PB, $\frac{6}{13}$ AC × PB × (PB, & ainsi de suite, & comme le prisme AC × PB × (PB est toujours le même, il s'ensuit que les paraboloïdes décrits autour de MN par la circonvolution des paraboles du second degré, du troisiéme, du quatriéme, &c. sont entr'eux comme $\frac{2}{5}$. $\frac{3}{7}$. $\frac{4}{9}$. $\frac{5}{11}$. $\frac{6}{13}$, &c.

Et si on veut sçavoir les rapports de ces paraboloïdes au cylindre que le rectangle circonscrit décrit en tournant autour de MN, on considerera que le centre de gravité de ce rectangle étant sur le milieu T de BP, la circonference du cercle que BT décriroit autour de MN est $\frac{1}{2}$ (BP, & que par conséquent le cylindre doit être AC × PB × $\frac{1}{2}$ (PB = $\frac{1}{2}$ AC × PB × (BP; ainsi ce cylindre n'est que la moitié du prisme AC × PB × (BP. Donc le paraboloïde décrit par la parabole quarrée étant les $\frac{2}{5}$ de AC × PB × (BP sera les $\frac{4}{5}$ du cylindre, le paraboloïde décrit par la parabole du troisiéme degré étant les $\frac{3}{7}$ de AC × PB × (PB sera les $\frac{6}{7}$ du cylindre, de sorte que les rapports de nos differens paraboloïdes au cylindre seront $\frac{4}{5}$. $\frac{6}{7}$. $\frac{8}{9}$. $\frac{10}{11}$. $\frac{12}{13}$, &c.

On pourra trouver de la même façon les solides décrits par les paraboles deuxiémes, troisiémes, &c. de tous les degrés, & ceux que décrivent toutes les differentes paraboles autour d'un autre axe de mouvement pris où l'on voudra, & les rapports de ces solides aux cylindres circonscrits, ce que je laisse à chercher à ceux qui étudieront ceci.

281. *Le centre de gravité d'une demi-parabole quarrée* BCP (Fig. 110.) *est un point* H *éloigné de la tangente* BN *au sommet d'une quantité égale aux trois cinquiémes de l'axe* BP *& distant de l'axe d'une quantité égale aux trois huitiémes de la base* PC.

Je mene les élémens MR, TV, &c. paralelles à la base PC, & concevant que la parabole tourne autour de la tangente BN, je trouve comme ci-dessus (*N.* 278.) que son centre de gravité est éloigné de cette tangente d'une quantité égale aux $\frac{3}{5}$ de son axe BP; mais comme ce centre ne peut pas être sur l'axe, je suppose que la parabole tourne autour de l'axe BP. Les centres de

gravité des élémens MR, TV, &c. étant sur leurs milieux Q, X, &c. je conçois ces élémens comme autant de poids qui seroient entr'eux dans le même rapport que ces élémens & qu'on auroit mis aux points Q, X, &c. & pour trouver leur centre d'équilibre commun. Je concois encore que ces poids soient transportés sur l'un des élémens, par exemple sur PC, ensorte que leurs distances à l'axe PB soient les mêmes que celles qu'ils avoient en Q, X, F; ainsi multipliant chaque poids par sa distance à l'axe, & divisant la somme des produits par la somme des poids, le quotient sera la distance de leur centre d'équilibre commun à l'axe. Or les poids ou les élémens sont entr'eux comme les racines quarrées des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c. & leurs distances étant les moitiés des élémens sont aussi dans la même raison; multipliant donc chaque terme de la suite des élémens laquelle a pour exposant $\frac{1}{2}$, par chaque terme de la suite des distances, laquelle a aussi pour exposant $\frac{1}{2}$, l'exposant de la suite des produits sera $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ou 1, & par conséquent la suite de ces produits sera au dernier $PC \times \frac{1}{2} PC$ ou $\frac{1}{2} \overline{PC}^2$ multiplié par le nombre des termes PB comme 1 est à l'exposant 1 augmenté de l'unité, ou comme 1 est à 2, & par conséquent cette somme de produits sera la moitié de $\frac{1}{2} \overline{PC}^2 \times PB$, c'est-à-dire elle sera $\frac{1}{4} \overline{PC}^2 \times PB$. Or la somme des élémens est $\frac{2}{3} PC \times PB$; divisant donc $\frac{1}{4} \overline{PC}^2 \times PB$ par $\frac{2}{3} PC \times PB$, le quotient $\frac{3}{8} PC$ sera la distance du centre de gravité de la parabole; prenant donc sur PC une quantité PZ égale à $\frac{3}{8}$ PC, & sur BP une quantité $BS = \frac{3}{5} BP$, puis menant par Z une droite ZH paralelle à PB, & par S une droite SH paralelle à PC, le point H où ces deux lignes se couperont, sera le centre de gravité de la parabole, car il sera éloigné de BN de $\frac{3}{5}$ BP, & de BP de $\frac{3}{8}$ PC.

Et par un semblable raisonnement on trouvera les centres de gravité de toutes les demi-paraboles de tous les degrés.

282. *Le centre de gravité d'un complement* BCV (Fig. 111.) *de parabole quarrée est un point* X *éloigné de l'axe* BP *d'une quantité égale aux* $\frac{3}{4}$ *de la tangente* BV *au sommet, & distant de la même tangente* BV *d'une quantité égale à* $\frac{3}{10}$ *de* CV.

Je mene les élémens MN, RS, &c. paralelles à BP, & ces élémens étant entr'eux comme les quarrés de leurs abscisses BM, BR, &c. ont pour exposant 2; multipliant donc ces élémens par

leur distance BM, BR à l'axe BP de la parabole autour duquel nous concevrons que le complement tourne, les produits formeront une suite dont l'exposant sera la somme $2+1$ ou 3 de l'exposant 2 de la suite des élémens & de l'exposant 1 de la suite des distances BM, BR, &c. qui sont entr'elles comme les nombres 0. 1. 2. 3, &c. ainsi la somme des produits sera au plus grand BV×VC multiplié par le nombre des termes BV comme 1 à $3+1$ ou comme 1 à 4, & partant cette somme de produits sera $\frac{1}{4}\overline{BV}^2 \times VC$; divisant donc cette somme par celle des élémens laquelle est $\frac{1}{3}$ BV × VC, le quotient $\frac{3}{4}$ BV fait voir que le centre de gravité cherché est distant de l'axe BP d'une quantité égale à $\frac{3}{4}$ BV.

Or ce centre ne pouvant être sur BV, je conçois que le complement tourne autour de BV, & comme la suite des élémens a pour exposant 2, & que les distances de leurs centres de gravité à la droite BV étant égales aux moitiés de ces élémens, ont aussi pour exposant 2, la somme des produits de chaque élément par chaque distance aura pour exposant $2+2$ ou 4; ainsi cette somme sera au dernier produit VC × $\frac{1}{2}$ CV ou $\frac{1}{2}\overline{VC}^2$ multiplié par le nombre des termes BV comme 1 à $4+1$ ou comme 1 à 5, c'est-à-dire cette somme sera $\frac{1}{10}\overline{VC}^2 \times BV$, & divisant cette somme par la somme $\frac{1}{3}$ VC × BV des élémens, le quotient $\frac{3}{10}$ CV sera la distance du centre de gravité du complement à la droite BV. C'est pourquoi prenant sur BV la partie BF $= \frac{3}{4}$ BV, & sur VC la partie VZ $= \frac{3}{10}$ VC, puis menant FX paralelle à VC & ZX paralelle à BC, le point X est le centre de gravité du complement, & ainsi des autres complemens de parabole.

283. Pour trouver le centre de gravité d'un segment BDC de parabole quarrée (*Fig.* 112.); je cherche le centre X de gravité de la parabole, & le centre de gravité O du triangle PBC. Je mene la droite OX que je prolonge en delà de X, puis je dis par Régle de Trois; comme le segment BDC est au triangle PBC, ainsi la distance OX du centre de gravité du triangle au centre de gravité de la parabole, est à un quatriéme terme, & faisant XZ égal à ce quatriéme terme, le point Z est le centre de gravité du segment.

Car puisque la parabole n'est autre chose que la somme du segment & du triangle, le centre de gravité X de la parabole, doit

doit être le centre d'équilibre du segment & du triangle. Mettant donc à la place du triangle & du segment deux poids qui soient dans le même rapport, ensorte que l'un soit sur le centre de gravité O du triangle, & l'autre sur le centre de gravité du segment; il faudra pour que ces poids soient en équilibre autour du point X que le poids O ou le triangle soit à l'autre poids ou au segment réciproquement comme la distance de ce second poids au centre d'équilibre X est à la distance du poids O au même centre X (*N.* 243.); or, c'est ce que nous venons de faire voir, donc le point Z que nous avons trouvé par ce moyen est le centre de gravité du segment.

284. De même pour trouver le centre de gravité d'une portion PMNC de demi-parabole quarrée PBC (*Fig.* 113.) comprise entre deux ordonnées MN, PC, à l'axe BP; je mesure la parabole PBC & la parabole MBN, & retranchant la petite de la grande, le reste est la valeur de la portion PMNC. Je cherche le centre de gravité X de la parabole PBC, & le centre de gravité O de la parabole MBN, je mene la droite OX que je prolonge au-delà de X, & je dis par Régle de Trois; comme la portion PMNC est à la petite parabole MBN; ainsi la distance OX du centre de gravité O de la petite parabole au centre X de la grande, est à un quatriéme terme qui sera la distance XZ du centre de gravité de la portion PMNC au centre X de la grande parabole; & par conséquent le point Z sera le centre de gravité de cette portion; car la parabole PBC n'étant autre chose que la somme de la petite parabole BMN, & de la portion PMNC, il faut que ces deux parties soient en équilibre autour du centre X, & par conséquent il faut que les distances de leurs centres de gravité O, Z leur soient réciproques.

285. *Le centre de gravité d'un arc de cercle* ABC (*Fig.* 114.) *est sur la ligne droite* OB *qui part du centre* O *du cercle, & qui coupe l'arc* ABC *en deux également en* B, *& la distance* XO *de ce centre de gravité au centre* O *du cercle, est une quatriéme proportionnelle à l'arc* ABC, *à sa corde* AC, *& au rayon* OB *du cercle.*

La premiere partie de cette proposition est évidente, car puisque l'arc ABC est divisé en deux également par la droite OB qui passe par le centre du cercle, & que tous les points du demi-arc AB sont autant éloignés de cette droite que tous les autres points de l'autre demi-arc BC; il est clair que ces deux demi-arcs doivent être en équilibre autour de BO.

Pour prouver la ſeconde, ſuppoſons d'abord que l'arc ABC ſoit moindre que la demi-circonférence, je mene par le point B la tangente PBT que je fais égale au diamétre MN paralelle à AC, en faiſant PB & BT égales chacune au rayon, & ſuppoſant que la demi-circonférence MBN & la tangente PT tournent autour du diamétre MN, la demi-circonférence MBN décrira la ſurface d'une ſphére, la tangente PT décrira la ſurface du cylindre circonſcrit à la ſphére, & l'arc ABC décrira la ſurface d'une zone, laquelle ſurface ſera égale à la ſurface cylindrique qui ſera décrite par la droite VE égale à la largeur AC de la zone; ainſi cette ſurface ſera égale à VE ou AC multipliée par la circonférence du rayon OB; or, la ſurface que l'arc ABC décrit eſt auſſi égale à l'arc ABC multiplié par la circonférence que décrit la diſtance OX de ſon centre de gravité à l'axe de mouvement MN; donc nous aurons AC×(OB = ABC×(OX, d'où je tire ABC. AC :: (OB. (OX, & au lieu des circonférences mettant les rayons, nous aurons ABC. AC :: OB. OX, & partant OX eſt quatriéme proportionnelle à l'arc ABC, à ſa corde AC, & au rayon OB.

Maintenant pour trouver le centre de gravité de l'autre arc ARC, je conſidére que le centre de gravité de la circonférence étant le centre O de cette circonférence, à cauſe que tous ſes points étant également éloignés de ce centre peſent egalement par rapport à ce centre. Les deux arcs ABC, ARC qui compoſent la circonférence doivent être en équilibre autour de leur centre de gravité commun O; c'eſt pourquoi je prolonge XO au-delà de X, & je dis par Regle de Trois comme l'arc ARC eſt à l'arc ABC réciproquement la diſtance XO du centre de gravité de l'arc ABC eſt à un quatriéme terme qui doit être la diſtance OZ du centre de gravité de l'arc ARC; ainſi nous aurons ABC×OX = ARC×OZ, ou en mettant au lieu de OX, & OZ leurs circonférences, ABC×(OX = ARC×(OZ; mais nous avons ABC×(OX = AC×(OB; donc ARC×(OZ = AC×(OB, & partant ARC. AC :: (OB. (OZ, ou bien en remettant les rayons au lieu des circonférences ARC. AC :: OB. OZ, ce qui fait voir que la diſtance OZ du centre de gravité Z de l'arc ARC au centre du cercle eſt auſſi quatriéme proportionnelle à l'arc ARC, à ſa corde AC & au rayon du cercle.

286. De-là il ſuit que ſi l'arc ABC eſt égal à la demi-circonférence, la diſtance de ſon centre de gravité au diamétre ou au

centre du cercle, est quatriéme proportionnelle à la demi-circonférence, au diamétre & au rayon.

287. *Le centre de gravité* X *d'un secteur de cercle* ABC (Fig. 115.) *est sur la droite* BR *menée du centre* B, *& qui coupe en deux également en* R *l'arc* AC *du secteur, & la distance de ce centre* X *au centre* B *du cercle est une quatriéme proportionnelle à l'arc* AC, *à sa corde* AC, *& aux deux tiers du rayon* AB *du cercle.*

Puisque la droite BR divise le secteur en deux parties égales; il est clair que ces deux parties doivent être en équilibre autour de BR, & que par conséquent le centre de gravité commun à ces deux parties doit être sur BR.

Maintenant pour trouver la distance de X au centre B du cercle, supposons d'abord que le secteur soit moindre qu'un demi-cercle, & qu'il tourne autour du diamétre MN perpendiculaire sur BR. Le cercle étant un polygone d'une infinité de côtés, est composé d'une infinité de triangles tous égaux qui ont leurs sommets au centre, & dont les bases sont les petits côtés égaux du polygone, ainsi le secteur ABC est composé d'un nombre de triangles qui est au nombre que le cercle en contient, comme l'arc ARC est à la circonférence entiere, & à cause que les bases des triangles sont infiniment petites, les perpendiculaires menées du centre sur les milieux de leurs bases, ne sont pas différentes des côtés de ces triangles, c'est-à-dire du rayon AB. Ainsi les centres de gravité des triangles qui composent le secteur, étant tous éloignés de leurs sommets d'une quantité égale aux deux tiers des lignes menées des sommes sur les milieux des bases (*N.* 273.), tous ces centres sont éloignés du centre B d'une quantité égale aux deux tiers du rayon AB, c'est pourquoi prenant sur AB la partie TB égale aux $\frac{2}{3}$ de AB, & du centre B & de l'intervalle BT décrivant l'arc TV, cet arc passera par tous les centres de gravité des triangles qui composent le secteur. Concevant donc ces triangles comme autant de poids égaux qui seroient attachés aux centres de gravité sur l'arc TV, il ne s'agit plus que de trouver leur centre de gravité commun, lequel n'est autre chose que le centre de gravité de cet arc, puisque tous les poids sont entr'eux comme les élemens de cet arc. Or, pour trouver le centre de gravité de l'arc, il faut faire cette analogie; l'arc TV est à sa corde TV comme le rayon TB est à la distance BX (*N.* 285.); & à cause des secteurs semblables ABC, TBV, nous avons l'arc ARC, est à sa corde AC, comme l'arc TV est à sa corde TV.

Donc l'arc ARC est à sa corde AC comme TB qui est les deux tiers du rayon AB est à la distance BX.

Si le secteur AHC est plus grand que le demi-cercle, nous trouverons en achevant la circonférence du rayon BT que les centres de gravité de tous les triangles qui composent le secteur AHC sont sur l'arc TPV. Or, pour avoir le centre de gravité de cet arc, il faut encore faire TPV. TV :: TB. BZ, & les secteurs semblables AHC, TPV, donnent TPV. TV :: AHC. AC, donc AHC. AC :: TB ou $\frac{2}{3}$ AB. BZ, & le point Z est le centre de gravité du secteur AHC.

288. De ce que nous venons de dire, on tire la méthode de trouver le centre de gravité d'un voussoir d'une voute circulaire. On sçait que les pierres ou voussoirs d'une voute circulaire ABHLCD (*Fig.* 116.) sont taillées de façon que tous leurs joints AD, BC, &c. étant prolongés, vont aboutir au centre P, & par conséquent chaque voussoir ABCD n'est autre chose qu'un secteur ABP moins un secteur semblable DCP. Pour avoir donc le centre de gravité de ce voussoir, on cherchera le centre de gravité X du secteur ABP, & le centre de gravité Z du secteur DCP, on mesurera aussi le secteur ABP, & le secteur DCP, & retranchant le petit du grand, on aura la valeur de la surface ABCD du voussoir; après quoi on dira par Régle de Trois, la surface ABCD est au secteur DCP réciproquement comme la distance XZ du centre de gravité du secteur DCP au centre de gravité X du secteur ABP est à un quatriéme terme qui sera la distance du centre de gravité de la surface ABCD au centre de gravité X du secteur APB; ainsi prolongeant ZX, & faisant XV égal à la distance trouvée le point V sera le centre de gravité de la surface ABCD; car la surface ABCD & le secteur DCP composant ensemble le secteur ABP doivent être en équilibre autour du centre X de gravité de ce secteur, c'est pourquoi leur centre de gravité particulier doivent être à des distances de X réciproques à leurs grandeurs.

Tout voussoir ayant de l'épaisseur, il est clair qu'après avoir trouvé le centre de gravité V de sa surface, celui du voussoir sera sur le milieu de l'épaisseur, c'est-à-dire de la perpendiculaire qui passeroit du point V sur la surface opposée.

289. Pour trouver le centre de gravité d'un segment ABC de cercle (*Fig.* 117.), je mesure le secteur ABCP, & le triangle APC, & retranchant la valeur du triangle de celle du secteur,

le reste est la valeur du segment ABC. Je cherche le centre de gravité X du secteur ABCP, & le centre de gravité O du triangle APC, puis menant la ligne OX que je prolonge au-delà de X, je dis par Regle de Trois : comme le segment ABC, est au triangle APC réciproquement la distance OX du centre de gravité O du triangle au centre de gravité X du secteur est à un quatriéme terme qui doit être la distance XZ du centre de gravité Z du segment au centre du secteur ; car le segment & le triangle composant le secteur doivent être en équilibre autour du centre de gravité du secteur, ce qui ne peut se faire à moins que les distances de leurs centres de gravité Z, O, au centre X ne soient réciproques à leurs grandeurs.

290. Pour trouver le centre de gravité d'une portion de cercle ACNM (*Fig.* 118.) comprise entre deux segmens ABC, MHN. Je cherche le centre de gravité X du quadrilatere ACNM, le centre de gravité O du segment MA, & le centre de gravité Z du segment CN, puis considérant les trois figures comme des poids mis à leurs centres de gravité X, O, Z ; je mene la droite OX, & je cherche sur cette droite le centre d'équilibre T des poids X, O, c'est-à-dire du quadrilatere ACNM, & du segment MA. Je mene la droite TZ, & concevant que les deux poids X, O soient mis sur leur centre d'équilibre T, je cherche le centre d'équilibre V des deux poids X, O mis en T & du poids Z, & le point V est le centre d'équilibre des trois poids X, O, Z, ou des trois figures ACNM, MA, & CN ; & par conséquent ce centre est le centre de gravité de la figure ACNM composée des trois.

291. *Le centre de gravité d'une ellipse* ABCD (*Fig.* 119.) *est la même que le centre* O *de la figure.*

Je mene les deux axes AC, DB tous les élemens paralelles au petit axe DB sont coupés en deux également par le grand axe AC ; donc leurs centres de gravité sont sur ce grand axe, & par conséquent leur centre de gravité commun est sur cet axe. Je mene le petit axe DB, lequel coupe le grand axe AC en deux parties égales, & comme tous les élemens paralelles à ce petit axe, pesent sur le grand comme s'ils étoient mis chacun sur son centre de gravité qui est sur le grand axe, & qu'il n'y a pas plus d'élemens qui traversent le demi-grand axe AO, qu'il n'y en a qui traversent l'autre demi-grand axe CO, & que les distances de ces élemens au centre O de part & d'autre sont égales chacune

à chacune. Il s'ensuit que tous les élemens dont les centres de gravité sont sur AO pesent autant sur AO que ceux dont les centres de gravité sont sur CO pesent sur CO, & que par conséquent le point O doit être leur centre de gravité commun, ou le centre de gravité de l'ellipse.

292. *Le centre de gravité d'un segment elliptique* ABCP (Fig. 120.) *dont la corde* AC *est ordonnée au grand axe, est le même que le centre de gravité du segment du cercle circonscrit à l'ellipse dont la corde* EH *est la même que* AC *prolongée de part & d'autre jusqu'à la circonférence du cercle.*

La ligne PB divise en deux également le segment circulaire EBHP, & le segment elliptique ABCP, & par conséquent le centre de gravité de l'un & l'autre segment doit être sur cette ligne. Or, nous avons démontré en parlant de l'ellipse, que les élemens du segment elliptique APCB perpendiculaires sur PB, sont proportionnels aux élemens du segment circulaire EBHP, & il est clair que les distances des élemens du segment elliptique au centre P de l'ellipse sont égales chacune à chacune aux distances des élemens du segment circulaire au même point P qui est aussi le centre du cercle. Supposant donc que chaque élement du segment elliptique ne soit que la moitié de chaque élement du segment circulaire, & concevant que l'un & l'autre tourne autour du petit axe MN perpendiculaire sur PB. La somme des produits des élemens du segment circulaire par leurs distances à l'axe de mouvement MN sera double de la somme des produits des élemens du segment elliptique par les mêmes distances; nommons $2x$ la somme des produits des élemens du segment circulaire par leur distance, nous aurons x pour la somme des produits des élemens du segment elliptique par leurs distances, & nommant $2y$ la somme des élemens du segment circulaire, nous aurons y pour celle des élemens du segment elliptique. Or, pour avoir la distance du centre de gravité du segment circulaire à l'axe de mouvement MN, il faut diviser la somme $2x$ des momens de ses élemens par la somme $2y$ des élemens, donc cette distance sera $\frac{2x}{2y}$ ou $\frac{x}{y}$; de même pour avoir la distance du centre de gravité du segment elliptique à l'axe de mouvement MN, il faut diviser la somme x des momens de ses élemens par la somme y des élemens, donc cette distance sera encore $\frac{x}{y}$, mais cette distance est

la même que nous avons trouvée pour le ſegment circulaire. Dont le centre de gravité X de l'un & de l'autre ſegment doit être le même.

293. Et on prouvera de même que le centre de gravité d'un ſegment elliptique ABC (*Fig.* 121.) dont la corde AC eſt perpendiculaire au petit axe, eſt le même que le centre de gravité du ſegment correſpondant EBH du cercle inſcrit; que le centre de gravité d'une bande elliptique AMNC compriſe entre deux doubles ordonnées AC, MN eſt le même que le centre de gravité de la bande correſpondante EHTV du cercle correſpondant, &c.

294. *Le centre de gravité* X *d'un ſecteur elliptique* ABCP (Fig. 120.) *dont la corde* AC *eſt perpendiculaire au grand axe* BZ *eſt le même que le centre de gravité du ſecteur correſpondant* EBHP *du cercle circonſcrit* BHZE.

Tous les élemens du ſecteur elliptique ſont proportionnels aux élemens du ſecteur circulaire, ſelon ce qui a été démontré dans les Sections Coniques, & les diſtances des centres de gravité des élemens du ſecteur elliptique au centre P de l'ellipſe ſont égales chacune à chacune aux diſtances des centres de gravité des élemens du ſecteur circulaire au même centre P, ſuppoſant donc que chaque élement du ſecteur circulaire ſoit double de chaque élement du ſecteur elliptique, le produit des élemens du ſecteur circulaire par leurs diſtances ſera double du produit des élemens du ſecteur elliptique; ainſi nommant le premier produit $2x$, le ſecond ſera x, & nommant auſſi $2y$ la ſomme des élemens du ſecteur circulaire, nous aurons y pour celle des élemens du ſecteur elliptique, & partant la diſtance du centre de gravité du ſecteur circulaire au centre P de l'ellipſe ſera $\frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$, & la diſtance du centre de gravité du ſecteur elliptique au même centre P ſera $\frac{x}{y}$; mais ces deux diſtances ſont la même; donc le point X eſt le centre de gravité de l'un & l'autre ſecteur.

Et par un ſemblable raiſonnement, on prouvera que le centre de gravité du ſecteur elliptique ABCP (*Fig.* 121.) dont la corde eſt perpendiculaire au petit axe, eſt le même que celui du ſegment correſpondant EBHP du cercle inſcrit.

295. Pour trouver le centre de gravité d'un ſegment elliptique

ABC (*Fig.* 122.) dont la corde AC eſt oblique au grand axe & au petit. Je diviſe ſa corde AC en deux également en S, & du point S par le centre P de l'ellipſe, je mene la droite PB qui ſera le demi-diamétre du ſegment. Je coupe le demi-grand axe RP en H en même raiſon que le demi-diamétre BP eſt coupé en S, c'eſt-à-dire, je fais BP. BS :: RP. RH; je mene par le point H la droite MN perpendiculaire au grand axe, ce qui me donne un ſegment elliptique MRN, dont je cherche le centre de gravité X par les Régles ci-deſſus; je coupe BS en Z, en même raiſon que RH eſt coupé en X, c'eſt-à-dire, je fais RH. RX :: BS. BZ, & le point Z eſt le centre de gravité du ſegment ABC. Ce que je prouve ainſi :

J'ai démontré dans les Sections Coniques, en parlant de l'ellipſe, que le ſegment ABC eſt égal au ſegment MRN, que leurs baſes ſont réciproques aux hauteurs, c'eſt-à-dire qu'en menant du point B la perpendiculaire BT ſur la baſe AC, on a AC. MN :: RH. BT; que ſi on conçoit RH coupé en une infinité de parties égales, & BS en un même nombre de parties, & qu'après avoir mené des points de diviſion des paralelles aux baſes MN, AC on circonſcrive ſur ces paralelles des petits rectangles à l'égard du ſegment MRN, & des petits paralellogrammes à l'égard du ſegment ABC, tels qu'on les voit dans la figure, enſorte qu'il y ait autant de rectangles d'une part que de paralellogrammes de l'autre; chaque rectangle du ſegment MRN eſt égal à chaque paralellogramme du ſegment ABC. Cela poſé.

Concevons que le ſegment MRN tourne autour de ſa baſe MN, & le ſegment ABC autour de ſa baſe AC. Les centres de gravité des rectangles du ſegment MRN ſeront ſur les milieux des petites parties de la droite RH qui traverſent ces rectangles & les coupent en deux également, & les centres de gravité des paralellogrammes du ſegment ABC, ſeront ſur les milieux des petites parties de la droite BS qui les traverſent, & qui les coupent en deux également. Concevons donc que tous les rectangles & les paralellogrammes ſoient autant de poids mis ſur leurs centres de gravité; & quant aux poids qui repréſentent les paralellogrammes, faiſons-les avancer paralellement à la baſe AC, juſqu'à ce qu'ils coupent la perpendiculaire BT en des points où nous les concevrons attachés.

Les droites RH, BS étant diviſées en un même nombre de parties

parties égales ; il eſt clair que les parties de RH compriſes dans les rectangles du ſegment MRN ſont proportionnelles aux parties de BS compriſes dans les paralellogrammes du ſegment ABC, & comme les centres de gravité des rectangles du ſegment MRN coupent en deux également les parties de RH compriſes dans les rectangles, de même que les centres de gravité des paralellogrammes du ſegment ABC, coupent en deux également les parties de BS compriſes dans les paralellogrammes; il eſt encore clair que la ligne RH eſt diviſée aux points O, O, &c. des centres de gravité des rectangles, en même raiſon que la ligne BS eſt diviſée aux points L, L, &c. des centres de gravité des paralellogrammes; mais à cauſe des paralelles LI, LI, &c. la perpendiculaire BT eſt diviſée aux points I, I, &c. en même raiſon que la droite BS aux points L, L, &c. donc la perpendiculaire BT eſt diviſée aux points I, I, &c. en même raiſon que la droite RH aux points O, O, &c. c'eſt-à-dire les diſtances IΓ, IT, &c. des centres de gravité des paralellogrammes du ſegment ABC à la baſe AC de ce ſegment, ſont entr'elles comme les diſtances OH, OH, &c. des centres de gravité des rectangles du ſegment, MRN à la baſe MN de ce ſegment; & partant ſi l'on ſuppoſe, par exemple, RH double de BT, tous les OH, ſeront doubles de tous les IT. Multipliant donc tous les rectangles du ſegment MRN par leurs diſtances OH, &c. la ſomme des produits ſera double de la ſomme des produits des paralellogrammes du ſegment ABC par leurs diſtances IT, &c. à cauſe de l'égalité des rectangles & des paralellogrammes ; ainſi nommant la premiere de ces ſommes de produits $2x$, la ſeconde ſera x, & par conſéquent ſi nous nommons y la ſomme des rectangles, la ſomme des paralellogrammes ſera auſſi y; diviſant donc $2x$, & x par y les quotients ſeront $\frac{2x}{y}$ & $\frac{x}{y}$, & feront voir que la diſtance du centre de gravité du ſegment MRN à ſa baſe eſt double du centre de gravité du ſegment ABC à ſa baſe AC, & qu'en prenant TQ $= \frac{1}{2}$ HX, le point Q ſera la diſtance du centre de gravité du ſegment ABC à ſa baſe AC. Or, le centre de gravité du ſegment ABC doit être ſur BS, donc du point Q menant QZ paralelle à AC, le point Z ſera le centre de gravité cherché, & BS ſera diviſé en même raiſon en Z, que BR en X.

296. J'ai démontré dans le même endroit des Sections Coniques que le ſecteur ABCP eſt égal au ſecteur MRNP en ſuppo-

ſant toujours que BP. BS :: RP. RH, & par conſéquent ſi dans l'un & l'autre ſecteur, on circonſcrivoit des rectangles & des paralellogrammes, de même que nous avons fait à l'égard des ſegmens, chaque rectangle ſeroit égal à chaque paralellogramme, & qu'en faiſant tourner le ſecteur MRNP autour du petit axe, lequel eſt paralelle à ſa baſe, & le ſecteur ABCP autour du diamétre conjugué, lequel eſt paralelle à ſa baſe AC, on trouveroit en ſuppoſant que la diſtance du centre O de gravité du ſecteur MRNP au centre P, ſoit la droite OB; on trouveroit, dis-je, que pour avoir le centre de gravité L de l'autre ſecteur, il faudroit faire RP. RO :: BP. BL.

297. Je ne parle point ici du centre de gravite de l'hyperbole, à cauſe que la quadrature de cette figure n'étant pas encore trouvée, ſon centre de gravité nous eſt encore inconnu; & je ne m'arrête pas davantage à chercher les centres de gravité d'un plus grand nombre de figures, attendu qu'il ſera aiſé de les trouver en faiſant l'application des principes précédens. Ce qui me reſte à preſent eſt de faire voir comment on trouve les centres de gravité des ſolides.

298. *Dans tout Priſme, paralellepipede & cylindre, ſi ſur le centre de gravité* X *de la baſe* (Fig. 123.), *on éleve une perpendiculaire* XZ *juſqu'à la baſe ſupérieure, le centre de gravité du ſolide ſera ſur le milieu* P *de cette perpendiculaire.* Ce qui eſt évident, car ſi l'on conçoit que le priſme ſoit coupé par une infinité de plans paralelles à ſa baſe, leſquels ſeront tous ſemblables & égaux à cette baſe, la perpendiculaire XZ paſſera par tous les centres de gravité de ces plans, & par conſéquent leur centre d'équilibre commun ſera auſſi ſur XZ, & comme tous les plans ſont égaux, & qu'il y en a autant entre P & Z qu'entre P & X, le point P ſera le centre cherché.

299. *Dans les figures ſemblables, les centres de gravité ſont ſemblablement poſés.*

Soient les deux figures ſemblables ABCDE, *abcde* (*Fig.* 124.), je diviſe chacune de ces figures en triangles par des lignes menées des angles égaux A, *a*, ainſi j'ai autant de triangles dans l'une que dans l'autre, & chaque triangle de l'une eſt ſemblable à chaque triangle de l'autre. Je mene dans les triangles ſemblables BAC, *bac* des ſommets A, *a*, les droites AH, *ah* ſur les milieux de leurs baſes BC, *bc*, & ces lignes ſont ſemblablement poſées dans ces triangles, de ſorte que j'ai AH. *ah* :: BC. *bc*;

or, les centres de gravité des deux triangles sont sur les deux tiers AR, *ar* des droites AH, *ah*, donc j'ai AR. *ar* :: AH, *ah*, & par conséquent les deux centres de gravité R, *r* sont semblablement posés dans ces triangles. Par la même raison les centres de gravité T, *t* des triangles semblables CAD, *cad* sont semblablement posés dans ces triangles, & nous avons AT. *at* :: CS. *cs* :: BC. *bc* :: AR. *ar*; & comme l'angle HAC est égal à l'angle *hac*, & l'angle CAS est égal à l'angle *cas*, l'angle HAS est aussi égal à l'angle *has*, & par conséquent les triangles RAT, *rat* sont semblables, puisqu'ils ont les côtés AR, AT proportionnels aux côtés *ar*, *at*, & l'angle compris RAT égal à l'angle compris *rat*.

Or, pour trouver le centre de gravité X commun aux deux triangles BAC, CAD, il faut diviser RT en deux parties RX, XT réciproques à ces deux triangles, & pour trouver le centre de gravité commun des triangles *bac*, *cad* semblables aux deux BAC, CAD, il faut aussi diviser *rt* en deux parties réciproques aux deux triangles, donc RX. XT :: *rx*. *xt*, & partant RX. RX + XT :: *rx*. *rx* + *xt* ou RX. RT :: *rx*. *rt*, ou RX. *rx* :: RT. *rt*, mais RT. *rt* :: RA. *ra*, donc RX. *rx* :: RA. *ra*, & par conséquent menant les droites AX, *ax*, les triangles RAX, *rax* sont semblables & semblablement posés dans les deux figures; & à cause de l'angle RAC égal à l'angle *rac*, l'angle CAX est égal à l'angle *cax*.

Le centre de gravité O du triangle AED, & le centre de gravité *o* du triangle AED sont aussi semblablement posés dans ces triangles, c'est pourquoi l'angle OAD est égal à l'angle *oad*; or, l'angle CAD est égal à l'angle *cad*, & l'angle CAX égal à l'angle *cax*, donc l'angle XAD est égal à l'angle *xad*, & l'angle XAO égal à l'angle *xao*; menant donc les droites XO, *xo*, les triangles XAO, *xao* seront semblables à cause de AX. *ax* :: AR. *ar* :: BC. *bc*, & de AO. *ao* :: ED. *ed* :: BC. *bc*, ainsi les droites XO, *xo* seront semblablement posées dans les deux figures.

Mais pour avoir le centre de gravité de la figure ABCDE, il faut diviser XO, en deux parties XZ, ZO réciproques au triangle AED, & à la somme des deux triangles ABC, ACD, & pour avoir le centre de gravité de la figure *abcde*, il faut diviser la droite *xo* en deux parties *xz*, *xo* réciproques au triangle *aed* semblable au triangle AED, & à la somme des deux *abc*, *acd* semblables aux deux ABC, ACD; donc XZ. ZO :: *xz*. *zo*, ainsi XZ. XZ + ZO ou XO :: *xz*. *xz* + *zo* ou *xo*, ou XZ. *xz* :: XO.

xo, mais XO. *xo* :: AO. *ao* :: ED. *ed* :: BC. *bc*, donc XZ. *xz* :: ED. *ed* :: BC. *bc*, & par conféquent les centres de gravité Z, *z* font femblablement pofés dans les deux figures, & ainfi des autres.

300. *Le centre de gravité de toute pyramide & de tout cône, eft fur la ligne droite menée du centre de la bafe au fommet, & la diftance de ce centre au fommet eft les trois quarts de la ligne menée au fommet.*

Tous les plans MNHR (*Fig.* 125.) qui compofent une pyramide, & qui font paralelles à la bafe BCDH font femblables entr'eux & à la bafe, menant donc du centre de gravité X de la bafe la droite XA, cette droite doit paffer par les centres de gravité de tous les plans MNHR, &c. car les triangles femblables ACD, ANH, donnent CD. NH :: AC. AN, & menant dans la bafe DCDE, & dans le plan MNHR les droites CX, NV, les triangles femblables ACX, ANV donnent AC. AN :: CX. NV, donc CD. NH :: CX. NV, & partant à caufe des angles égaux VNH, XCD, les droites CX, NV proportionnelles aux côtés homologues CD, NH des deux plans, font femblablement pofées dans ces deux plans; & comme le centre de gravité X de la bafe BCDE eft pofé à l'extrêmité X, il faut néceffairement que le centre de gravité V du plan MNHR foit pofé fur l'extrêmité V de la droite NV, autrement ces deux centres de gravité ne feroient pas femblablement pofés dans leurs plans, mais les points X, V appartiennent à la droite XA, donc tous les centres de gravité des plans qui compofent la pyramide font fur la droite XA menée du centre de gravité de la bafe au fommet, & par conféquent leur centre de gravité doit être fur XA.

Maintenant fi la droite XA eft perpendiculaire fur la bafe, les diftances VA, &c. des centres de gravité des plans au fommet A, feront égales aux hauteurs des plans, c'eft-à-dire aux diftances des plans au fommet. Or, les plans étant entr'eux comme les quarrés de leurs hauteurs, forment une fuite dont l'expofant eft 2, & les diftances de leurs centres de gravité au fommet A forment une autre fuite dont l'expofant eft 1, donc la fomme des produits des plans par les diftances de leurs centres de gravité ou par leurs hauteurs formera une fuite dont l'expofant fera 2 + 1 ou 3, & par conféquent cette fuite fera a fon dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3+1 ou 1 à 4. Ainfi nommant *aa* la bafe BCDE, & *b* la hauteur AX, la fomme des pro-

duits sera $\frac{1}{4}$ *aabb*, mais la somme des plans est $\frac{1}{3}$ *aab*; divisant donc $\frac{1}{4}$ *aabb* par $\frac{1}{3}$ *aab*, le quotient $\frac{3}{4}$ *b* sera la distance du centre de gravité de la pyramide au sommet A.

Si la droite XA (*Fig.* 126.) n'est pas perpendiculaire sur la base, j'abaisse du sommet A la perpendiculaire AP, je transporte sur cette perpendiculaire tous les centres de gravité par des lignes paralelles à la droite XP qui est dans le plan de la base, & considérant tous les plans comme autant de poids attachés à tous les points du levier AP, je trouverai, comme ci-dessus, que la somme des produits de chaque poids par sa distance est $\frac{1}{4}$ *aabb*, & la somme des poids $\frac{1}{3}$ *aab*; divisant donc la premiere somme par la seconde, j'aurai $\frac{3}{4}$ *b* par la distance AQ. Transportant donc le point Q sur la droite AX par une ligne QR paralelle à XP, le point R sera le centre de gravité de tous les plans ou de la pyramide, & nous aurons AR $= \frac{3}{4}$ AX; car à cause des triangles semblables AXP, ARQ, nous avons AP. AQ :: AX. AR, mais AQ $= \frac{3}{4}$ AP, donc AR $= \frac{3}{4}$ AX.

301. Comme tous les solides à plusieurs faces peuvent se diviser en plusieurs pyramides, de même que tous les plans peuvent se diviser en triangles, on trouvera le centre de gravité d'un corps irrégulier en cherchant les centres de gravité de toutes les pyramides qui les composent, & ensuite le centre de gravité commun à toutes les pyramides.

302. *Le centre de gravité* H *de la surface d'un segment* ABC *de sphere* (Fig. 127.) *est sur le milieu de la ligne* BR *élevée perpendiculairement sur le centre* R *de sa base* AC.

La surface du segment ABC est égale à la surface FMNE de la partie FMNE du cylindre circonscrit, laquelle partie a pour hauteur la droite FM égale à la hauteur RB du segment; or, si l'on coupe la partie cylindrique FMNE en deux parties égales par un plan TV paralelle à la base, la surface cylindrique TMNV sera égale à la surface TFEV, & par conséquent ces deux surfaces seront en équilibre autour du plan coupant TV, & leur centre de gravité commun sera sur ce plan, c'est-à-dire au point H qui est le centre de ce plan, mais la surface XBZ que le plan TV coupe sur le segment, est égale à la surface TMNV, & l'autre surface AXZV est égale à la surface FTVF, donc les deux surfaces XBZ, AXZC sont égales entr'elles, & partant elles sont en équilibre autour du plan, & leur centre de gravité commun est sur ce plan, c'est-à-dire au point H.

On prouvera de la même façon que le centre de gravité d'une zône sphérique AXZC est sur le milieu de la droite RH menée du centre O du cercle AC qui sert de base inférieure au centre H du cercle XZ qui est la base supérieure.

303. *Le centre de gravité* X *d'un secteur* ABCD *de sphére* (Fig. 128.) *est sur la droite* BP *menée du centre* D *de la sphére par le centre* P *du cercle qui sert de base au segment* ABC, *& la distance* DX *de ce centre de gravité au centre* D *de la sphére, est égale aux* $\frac{3}{4}$ *du rayon* BD *moins les* $\frac{3}{8}$ *de la droite* PB *comprise entre la surface de la sphére & le cercle qui sert de base au segment.*

Le secteur sphérique ABCD n'est autre chose qu'une infinité de pyramides qui ont toutes leurs sommets au centre D de la sphére, & leurs bases sur la surface de la sphére ; ainsi toutes ces pyramides dont les bases sont infiniment petites ont pour hauteur le rayon AD ou BD, & leurs centres de gravité sont éloignés du sommet commun A d'une quantité égale à $\frac{3}{4}$AD ou $\frac{3}{4}$BD, c'est pourquoi si je conçois un autre sphére dont le centre soit le même centre D, & dont le rayon DH soit égal à $\frac{3}{4}$AD, la surface du secteur HRLD semblablable au secteur ABCD passera par tous les centres de gravité des pyramides, & comme toutes les pyramides sont en équilibre autour de la droite DB, de même que toutes les parties de la surface HRL sont en équilibre autour de la même droite ; il est clair que si nous concevons les pyramides attachées à leur centre de gravité sur la surface HRL, leur centre de gravité commun sera le centre de gravité de la surface HRL, & par conséquent ce centre sera sur le milieu X de la droite RV.

Or, à cause des secteurs semblables ABCD, HRLD, nous avons AD. HD :: AC. HL :: BP. RV ; donc à cause de HD $= \frac{3}{4}$ AD, nous avons RV$= \frac{3}{4}$ BP, & par conséquent RX$= \frac{1}{2}$RV $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ BP $= \frac{3}{8}$ BP, mais XD $=$ RD $-$ RX, & RD $= \frac{3}{4}$ BD, donc XD $= \frac{3}{4}$ BD $- \frac{3}{8}$ BP.

Pour trouver le centre de gravité de l'autre secteur AMCD, je mesure la sphére entiere & le secteur ABCD, & retranchant ce secteur de la sphere entiere, le reste est la valeur du secteur AMCD, c'est pourquoi prolongeant la droite XD au-delà de P en Z, je dis par Régle de Trois : comme le secteur AMCD est au secteur ABCD, réciproquement la distance XD du centre de gravité X du secteur ABCD au centre D de la sphére est à un quatriéme terme qui sera la distance DZ du centre de gravité Z

du secteur AMCD au même centre D ; car les deux secteurs composant la sphere, doivent être en équilibre autour du centre D qui est leur centre de gravité commun.

304. Pour trouver le centre de gravité d'un segment ABC (*Fig.* 129.). Je mesure le secteur ABCD, & le cône ACD, puis retranchant le cône du secteur, le reste est la valeur du segment, je cherche le centre de gravité X du secteur, & le centre de gravité Z du cône, puis prolongeant ZX vers B, je dis par Régle de Trois : le segment ABC est au cône ACD réciproquement comme la distance ZX du centre de gravité du cône au centre de gravité X du secteur, est à un quatriéme terme qui sera la distance XV du centre de gravité V du segment au même centre X du secteur, car le segment & le cône doivent être en équilibre autour du centre X du secteur qu'ils composent.

305. Pour trouver le centre de gravité d'une zone ABCD de sphére (*Fig.* 130.), dont la base AD est un cercle égal au grand cercle de la sphére. Je retranche d'abord de cette zone le cône BCP de même hauteur, & dont la base BC est égale à la base superieure de la zone, & le reste est une espéce de cuvette ou d'entonnoir ABPCD ; or, cet entonnoir est composé d'une infinité de pyramides égales qui ont le sommet au centre P de la sphére, & les bases sur la surface de la zone ; ainsi ces pyramides ont toutes les hauteurs égales entr'elles & au rayon BP ou AP, & par conséquent leurs centres de gravité sont tous éloignés de leur sommet commun P d'une quantité égale à $\frac{3}{4}$ AP ou $\frac{3}{4}$ BP. C'est pourquoi si je conçois une sphére dont le centre soit le point P, & dont le rayon soit PH$=\frac{3}{4}$AP, l'entonnoir HRPZV de cette sphére sera semblable à l'entonnoir ABPCD, & la surface de l'entonnoir HRPZV passera par tous les centres de gravité des pyramides qui composent l'entonnoir ABPCD ; concevant donc toutes ces pyramides comme autant de poids attachés à leur centre de gravité sur la surface HRZV, leur centre de gravité commun sera le même que le centre de gravité de la surface HRZN ; mais le centre de gravité de cette surface est sur le milieu O de sa hauteur TP, donc le centre de gravité de l'entonnoir ABPCD sera le point O.

Je cherche le centre de gravité L du cône BPC, après quoi je partage la droite LO en deux parties LX, XO qui soient entr'elles réciproquement comme l'entonnoir ABPCD est au cône BPC, & le point X est le centre de gravité de la zone ABCD,

car cette zone étant composée de l'entonnoir ABPCD & du cône BPC, les distances des centres de gravité de ces deux parties à leur centre de gravité commun X doivent leur être réciproques.

Mais si la base inférieure BC d'une zone BMNC n'est pas le grand cercle de la sphére; je cherche le centre de gravité L de la zone AMND qui a pour base le grand cercle de la sphére, & le centre de gravité X de la zone ABCD qui a aussi pour base le grand cercle de la sphére; je mesure la zone AMND, & la zone ABCD, & retranchant la petite de la grande, le reste est la zone BMNC; c'est pourquoi je dis, par Regle de Trois : la zone BMNC est à la zone ABCD, réciproquement comme la distance XL du centre de gravité de la zone ABCD au centre de gravité L de la zone AMND, est à un quatriéme terme qui sera la distance LZ du centre de gravité Z de la zone BMNC au centre L de la zone AMND, car les deux zones ABCD, BMNC doivent être en équilibre autour du centre L de la zone AMND qu'elles composent.

306. REMARQUE. J'aurois encore beaucoup de choses à dire touchant les centres de gravité des Corps, mais comme cette matiere est beaucoup plus épineuse qu'elle n'est utile, je renvoye les Curieux à la *Mesure des Surfaces & des Solides par l'Arithmétique des Infinis, & par les Centres de gravité*, que je fis imprimer à Paris chez JOMBERT Libraire, en 1740. J'y ai traité ce sujet de façon à n'y laisser rien à desirer.

De la descente des Corps sur les Plans inclinés.

307. Si deux ou plusieurs corps A, B, C, D (*Fig.* 131.) unis par des liens, sont en équilibre autour d'un centre d'équilibre H, l'effort total de leur pesanteur est reuni dans ce point, car puisque ces corps se contre-balancent autour de H, c'est-à-dire que les forces d'un côté sont égales aux forces de l'autre : il est clair que le point H soutient tout leur effort, & qu'ils agissent autant sur ce point que s'ils y étoient tous attachés, & il faut dire la même chose de l'effort que toutes les parties d'un corps font autour du centre de gravité de ce corps; de sorte qu'on peut considérer toutes ces parties comme réunies à ce centre, & faisant autant d'effort pour le faire descendre vers le centre de la terre, qu'elles en font chacune en leur place.

308.

308. *Si un corps* AB (Fig. 132.) *est mis sur un plan horizontal, de façon que la ligne* XQ *menée de son centre* X *perpendiculairement à l'horizon, tombe dans la base* AM, *sur laquelle le corps s'appuye, ce corps subsistera sur sa base sans tomber, mais si la verticale* XQ *tombe hors de la base* AM, *le corps tombera sans pouvoir subsister sur sa base.*

Dans le premier cas (*Fig.* 132.), il est clair que si le centre de gravité X étoit soutenu par un pivot XQ perpendiculaire à l'horizon, toutes les parties de ce corps étant en équilibre autour de ce point, leur effort se réuniroit au point X pour le faire descendre selon la direction XQ; or, le pivot XQ resistant selon la direction opposée à cet effort, le centre X ne sçauroit remuer, & par conséquent toutes les parties du corps resteroient en repos autour de lui; mais le point X est soutenu par les parties inférieures du solide, de la même façon qu'il le seroit par le pivot XQ. Donc, &c.

Dans le second cas (*Fig.* 133.), le centre de gravité n'est soutenu de rien; ainsi l'effort réuni de toutes les parties du corps ne trouvant point d'obstacles, doit faire baisser ce point, ce qui ne peut arriver à moins que le corps ne se renverse.

309. *Si un corps* AB (Fig 134.) *est mis sur un plan incliné* MN, *ensorte que la ligne* XO *menée de son centre* X *perpendiculairement à l'horizon ne passe pas par sa base* AC, *ce corps se culbutera sur le plan incliné, mais si la verticale* XO *passe par la base* AC (Fig. 135.), *le corps glissera sur le plan sans se culbuter.*

Dans le premier cas, le corps tomberoit quand même il seroit appuyé sur un plan horizontal MC, à plus forte raison tombera-t-il lorsque sa base sera sur un plan incliné.

Dans le second cas, l'effort de toutes les parties du corps pousse le centre X selon la direction verticale XO qui passe par la base; ainsi si cette base étoit horizontale, le corps resteroit debout sans remuer. Mais comme la pression verticale XO qui se fait sur la base & sur le plan incliné est oblique à ce plan; je mene du point X la droite XR perpendiculaire sur le plan incliné, & achevant le paralellogramme RXOS, la force verticale XO est composée de la force perpendiculaire XR à laquelle le plan incliné resiste invinciblement & de la force XS, laquelle n'agit point sur le plan; ainsi le centre de gravité doit prendre la direction XS, mais il ne sçauroit prendre cette direction à moins que toutes les parties

du corps ne le ſuivent; donc le corps doit gliſſer le long du plan incliné ſelon cette direction.

310. Comme on peut mettre ſur un plan incliné toutes ſortes de corps de quelque figure qu'ils ſoient, nous nous bornerons dans la ſuite aux corps ſphériques, tels que le corps A (*Fig.* 136.) dont le mouvement doit ſe faire en roulant, à cauſe que la direction verticale AZ de ſon centre de gravité A tombe toujours hors du point C où la ſphére touche le plan.

311. PROPOSITION L. *Si un corps deſcend ſur un plan incliné* BR (Fig. 136.), *il deſcend moins vîte que s'il deſcendoit librement vers le centre de la terre.*

La peſanteur d'un corps le pouſſe ſelon la verticale AZ, laquelle eſt inclinée au plan BR, ainſi menant du point A la droite AC perpendiculaire au plan BR, & achevant le paralellogramme ACZD, la peſanteur AZ eſt compoſée de la force AC & de la force AD. Or, le plan reſiſte invinciblement à la force AC; donc la peſanteur n'agit plus ſur le corps qu'avec la direction & la force AD, laquelle eſt moindre que la force AZ, & par conſéquent le corps étant pouſſé avec une force moindre que celle qui le pouſſeroit vers le centre de la terre, doit auſſi aller moins vîte.

312. Nous nommerons *Peſanteur abſolue*, la peſanteur d'un corps qui deſcend librement vers le centre de la terre, & *Peſanteur relative*, la force qui reſte à la peſanteur d'un corps pour le faire deſcendre le long d'un plan incliné. Ainſi dans la Figure 136, la peſanteur abſolue du corps B étant exprimée par la verticale AZ qui eſt la diagonale du paralellogramme CADZ, ſa peſanteur relative ſera la force AD, avec laquelle ce corps deſcend le long du plan incliné BR.

313. *Si un corps* A (Fig. 136.) *deſcend ſur un plan incliné* BR, *ſa peſanteur abſolue eſt à ſa peſanteur relative, comme le ſinus droit eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon* BRO *que le plan* BR *fait avec ſa baſe* OR *horizontale, ou comme le côté* BR *du plan incliné eſt à ſa hauteur* BO.

Je prolonge AZ juſqu'à la baſe OR en S, & les triangles rectangles ACZ, SZR ſont ſemblables, à cauſe des angles aigus CZA, SZR oppoſés au ſommet; donc AZ. CZ ou AD :: ZR. ZS; mais à cauſe des triangles ſemblables SZR, OBR, nous avons ZR. ZS :: BR. BO; donc AZ. AD :: BR. BO, c'eſt-à-dire la peſanteur abſolue AZ eſt à la peſanteur relative AD com-

me la longueur BR du plan incliné eſt à ſa hauteur BO.

Or, dans le triangle rectangle BRO, la longueur BR eſt à la hauteur BO, comme le ſinus de l'angle droit BOR eſt au ſinus de l'angle BRO de l'inclinaiſon du plan BR ſur ſa baſe, donc la peſanteur abſolue eſt à la peſanteur relative, comme le ſinus droit eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon du plan ſur la baſe.

314. Plus l'angle d'inclinaiſon BRO diminue plus le ſinus de cet angle devient petit par rapport au ſinus droit, & par conſéquent plus la peſanteur relative AD diminue par rapport à la peſanteur abſolue, laquelle eſt toujours la même; ainſi à meſure que BR eſt plus incliné à l'horizon, moins le corps deſcend vîte ſur ce plan.

315. *Si un corps* A (Fig. 137.) *deſcend ſucceſſivement le long de differens Plans diverſement inclinés à l'horizon* BC, CD, EC, &c. *les peſanteurs relatives ſur ces differens Plans ſont entr'elles comme les ſinus des angles d'inclinaiſon* BCH, DCH, ECH *des Plans inclinés.*

Car nommant P la peſanteur abſolue du corps, S le ſinus total, R la peſanteur relative du corps A ſur le plan DC, *r* ſa peſanteur relative ſur le plan BC, V le ſinus de l'angle d'inclinaiſon DCH du plan DC, & *u* le ſinus de l'angle d'inclinaiſon BCH du plan BC, nous aurons par rapport au plan DC, P. R :: S. V, ou P. S :: R. V, & par rapport au plan BC, P. *r* :: S. *u*, ou P. S :: *r*. *u*; donc R. V :: *r*. *u*, & partant R. *r* :: V. *u*, c'eſt-à-dire la peſanteur relative ſur le plan DC eſt à la peſanteur relative ſur le plan BD, comme le ſinus V de l'angle d'inclinaiſon du plan DC eſt au ſinus *u* de l'angle d'inclinaiſon du plan BC, & ainſi des autres.

316. PROPOSITION LI. *Si une puiſſance* P (Fig. 138.) *ſoutient un corps* A *ſur un Plan incliné* BC *avec une direction* PA *paralelle à* BC, *enſorte que la puiſſance & le poids ſoient en équilibre, la puiſſance eſt au poids comme la peſanteur relative eſt à la peſanteur abſolue, ou comme la hauteur du Plan incliné eſt à ſa longueur* BC, *ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon du Plan eſt au ſinus droit.*

Du centre A je mene la verticale AZ qui coupe le plan incliné en Z & la droite AC perpendiculaire ſur ce plan, & achevant le paralellogramme ACZD, la peſanteur abſolue eſt à la relative comme AZ & AD; ainſi puiſque le corps n'eſt mû que par la peſanteur relative AD, la puiſſance P qui tire le corps avec la direction AP directement oppoſée & qui eſt en équilibre avec AD, doit être exprimée par la droite AM égale à AD, & par conſé-

quent MA. AZ :: AD. AZ, c'eſt-à-dire la puiſſance P eſt à la peſanteur abſolue AZ, ou au poids A comme la peſanteur relative AD eſt à la peſanteur abſolue AZ.

Or la peſanteur relative eſt à l'abſolue comme la hauteur du plan incliné eſt à ſa longueur, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus total; donc la puiſſance P eſt au poids A dans ces mêmes raiſons.

317. Si au lieu d'une puiſſance qui tire le corps de A vers P, on mettoit une puiſſance qui le repouſsât de D vers A ſelon la direction DA, & que la puiſſance & le poids fuſſent en équilibre, la puiſſance ſeroit au poids encore comme la peſanteur relative eſt à la peſanteur abſolue, &c. ce qui eſt évident.

318. Si au lieu d'une puiſſance qui ſoutient le corps, on met un poids R (*Fig.* 139.) qui tire le corps ſelon la direction XA paralelle au plan incliné BC par le moyen d'une poulie X ſur laquelle paſſe la corde, d'où le poids R pend, & que le poids R & le poids A ſoient en équilibre, le poids R eſt encore au poids A comme la peſanteur relative de A eſt à ſa peſanteur abſolue, ou, &c. car l'effet du poids R ſera encore exprimé par la droite MA égale à la droite AD qui exprime la peſanteur relative du corps A; ainſi comme le poids R qui n'eſt ſur aucun plan incliné, tend vers le centre de la terre avec toute ſa force ou avec toute ſa peſanteur abſolue, il eſt clair que le poids total de R doit être au poids total de A comme MA ou AD eſt à AZ.

319. PROPOSITION LII. *Soit ſur un plan incliné* BC *un corps ſphérique* A (Fig. 140.) *dont la peſanteur abſolue eſt exprimée par la verticale* AZ, *& la peſanteur relative par la droite* AD *paralelle au plan incliné* BC; *ſi l'on prolonge* AD *du côté oppoſé, & qu'après avoir fait* MA = AD, *& mené par les points* M, D *les droites* PQ, ZK *paralelles à la droite* EG *perpendiculaire au plan* BC *au point d'attouchement* G, *on tire du point* A *des lignes droites ſur tous les points de* PQ, *& d'autres lignes ſur tous les points de* ZK. *Je dis que toutes ces lignes, à l'exception de celles qui paſſent par l'angle* QAE *& par l'angle* GAZ *oppoſé au ſommet à l'angle* QAE *exprimeront des puiſſances, chacune deſquelles dans ſa direction ſera en équilibre avec le corps* A, *c'eſt-à-dire que les puiſſances* AH, AL, AF, &c. *ſeront en équilibre en tirant le corps vers la droite* PQ *ſur laquelle elles ſe terminent, & les puiſſances* AK, AN, AD, &c. *qui ſe terminent ſur* ZK *ſeront auſſi en équilibre en pouſſant le corps vers la même droite* PQ.

Nous ſçavons que la peſanteur abſolue AZ eſt compoſée de la

force AG à laquelle le plan résiste invinciblement, & de la force AD paralelle au plan incliné BC; or la direction de la puissance AH qui tire le corps vers H étant oblique à la force AD, est composée de deux HR, HM, ou des deux MA, AR; dont la premiere MA tirant de A vers M est égale & opposée à la pesanteur relative AD, & l'autre AR tirant de A vers R est opposée à la force AG, mais moindre qu'elle; ainsi la force MA est en équilibre avec la pesanteur relative AD, & la force AR ne détruisant qu'une partie de la force AG, ne peut empêcher le corps A de s'appuyer sur le plan; donc la force AH équivalente aux deux AM, AR est en équilibre avec le corps A; & on prouvera la même chose de toutes les puissances qui sont entre la direction AM paralelle au plan incliné & la direction verticale AQ, laquelle est égale à la pesanteur absolue AZ, à cause qu'elle est composée de la force AE qui tire de A vers E, & de la force AM qui tire de A vers M, & que ces deux forces AE, AM sont égales & opposées chacune à chacune aux deux forces AG, AD qui composent la pesanteur absolue AZ.

Les puissances AF, AP, &c. qui passent dans l'angle TAG sont aussi en équilibre avec le corps A; car la puissance FA est composée de la force FM & de la force F*p*, ou de la force A*p* qui tire de A vers *p*, & de la force MA qui tire de M vers A; or la force MA est en équilibre avec la pesanteur relative AD, & la force A*p* ne fait qu'affermir davantage le corps sur le plan incliné; donc, &c.

Les puissances qui passent dans l'angle EA*t* sont égales chacune à chacune à celles qui passent dans l'angle TAG, & font le même effet en poussant le corps A, que les autres en le tirant; donc ces puissances sont encore en équilibre avec le corps A, & par la même raison celles qui passent par l'angle *t*AZ opposé au sommet à l'angle TAQ, sont aussi en équilibre avec le corps A, puisqu'elles font le même effet en poussant ce corps, que les puissances de l'angle TAQ en le tirant.

Maintenant les puissances qui sont dans l'angle QAE ne sçauroient être en équilibre avec le corps A; car la puissance AX est composée de la force XM ou AY qui tire de A vers Y, & de la force YX ou AM qui tire de A vers M; or MA est égale & opposée à la pesanteur relative AD; mais AY est plus grande que AG son opposée; donc la force AX composée de deux forces AY, AM est plus grande que la pesanteur absolue, & par consé-

quent la force AX doit enlever le corps, & ainſi des autres.

Que ſi les puiſſances qui paſſent dans l'angle QAE pouſſoient le corps A au lieu de le tirer, il arriveroit que ces puiſſances augmenteroient la preſſion du corps ſur le plan incliné BC, & que ce corps deſcendroit deux fois plus vîte; car la puiſſance XA pouſſant de X vers A eſt compoſée de la force XM ou YA qui pouſſe de Y vers A, & de la force XY ou MA qui pouſſe de M vers A; ainſi XM augmenteroit la preſſion du corps A au point G, & MA joint à AD donneroit au corps une viteſſe double de celle que la peſanteur relative AD lui donne; & la même choſe doit ſe dire des puiſſances qui paſſent dans l'angle GAZ; car celles-ci ſont égales chacune à chacune à celles qui paſſent par l'angle QAE, & font le même effet en tirant le corps, que les autres feroient en le pouſſant.

Pour ce qui regarde la puiſſance AE en particulier, il eſt clair que ſi cette puiſſance en tirant de A vers E eſt égale à la force AG qui eſt l'une des compoſantes de la peſanteur, la preſſion du corps A ſur le plan ceſſera, mais la force AD qui eſt l'autre compoſante agira toujours, & par conſéquent le corps A ne ceſſera de deſcendre; que ſi la puiſſance AE eſt moindre que AG, la preſſion du corps A ſur le plan incliné diminuera, & le corps deſcendra encore; enfin ſi AE eſt plus grande que AG, la puiſſance AE enlevera le corps A de deſſus le plan; mais AD le fera toujours deſcendre ſelon ſa direction, car la force AE n'eſt compoſée d'aucune force qui ſoit contraire en tout ou en partie à la force AD. Que ſi AE pouſſoit le corps de E vers A, elle augmenteroit la preſſion du corps ſur le plan à proportion de ſa grandeur; mais quelque grande qu'elle pût être, elle n'empêcheroit jamais le corps de deſcendre ſelon la direction AD; & il faut dire la même choſe de celle qui tireroit ſelon la direction GA.

320. COROLLAIRE. *Si l'on prolonge les directions des puiſſances dont nous venons de parler juſqu'à ce qu'elles coupent le plan incliné; par exemple, ſi l'on prolonge* HA *juſqu'à ce qu'elle coupe le plan incliné* BC *en* h *où elle fera un angle* HhB *que nous nommerons angle de* Traction, *je dis que chaque puiſſance ſera à la peſanteur abſolue* AZ *ou au poids* A, *comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon* BCO *du plan ſur ſa baſe eſt au ſinus de complement à l'angle droit de l'angle* HhB *de traction.*

Je prolonge AZ juſqu'à la baſe OC en *a*, (*Fig.* 141.) les triangles GAZ, *a*ZC étant ſemblables à cauſe de l'angle aigu GZA

égal à l'angle aigu aZC qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'angle GAZ eſt égal à l'angle d'inclinaiſon ZCa du plan BC ſur la baſe OC, & dans le triangle rectangle GAh, l'angle GAh eſt l'angle du complement à un droit de l'angle de traction GhA. Ainſi prenant pour ſinus total la droite AG, & menant du point G la perpendiculaire Gg ſur AZ, & la perpendiculaire Gm ſur Ah, la droite Gg ſera le ſinus de l'angle GAZ d'inclinaiſon du plan ſur ſa baſe, & la droite Gm ſera le ſinus du complement GAh à un droit de l'angle de traction GhA. Cela poſé.

Le triangle rectangle HMA eſt ſemblable au triangle rectangle GAh, & celui-ci eſt ſemblable au triangle GAm; donc HMA eſt ſemblable à GAm, & nous avons HA. MA :: AG. Gm; mais MA = AD = GZ; donc HA. GZ :: AG. Gm, & partant HA × Gm = GZ × AG.

Les triangles ſemblables AZG, AGg donnent AZ. GZ :: AG. Gg; donc AZ × Gg = GZ × AG; mais nous venons de trouver HA × Gm = GZ × AG; donc HA × Gm = AZ × Gg, & partant HA. AZ :: Gg. Gm, c'eſt-à-dire la puiſſance HA eſt à la peſanteur abſolue AZ ou au poids A comme le ſinus Gg de l'angle d'inclinaiſon du plan eſt au ſinus Gm de l'angle GAm complement à l'angle droit de l'angle GhA de traction; & le même ſe prouvera de toutes les puiſſances compriſes entre la droite TA paralelle au plan incliné & la verticale ZQ, & auſſi de toutes celles qui paſſent par l'angle ZAt oppoſé au ſommet à l'angle TAQ; car celles-ci ſont le même effet en pouſſant le corps, que celles qui paſſent par l'angle TAQ, & qui tirent le corps.

Quant aux puiſſances qui paſſent par l'angle TAG (*Fig.* 142.) je mene de même la droite Gm perpendiculaire ſur AL, & la droite Gg perpendiculaire ſur AZ, & prenant pour ſinus total la droite AG, j'ai comme ci-deſſus la droite Gg pour le ſinus de l'angle GAg égal à l'angle d'inclinaiſon BCO, & la droite Gm pour le ſinus de l'angle GAL complement à l'angle droit de l'angle ALG de traction; or les triangles rectangles FAM, LGA ſont ſemblables à cauſe de l'angle aigu MAF égal à l'angle aigu ALG qui lui eſt alterne, & le triangle rectangle LAG eſt ſemblable au triangle rectangle mGA à cauſe de mG perpendiculaire ſur l'hypothenuſe LA; donc les triangles FMA, mGA ſont ſemblables, & donnent FA. MA ou GZ :: AG. Gm, & partant FA × Gm = GZ × AG.

De même les triangles rectangles ſemblables AGZ, AGg

donnent AZ. ZG : : AG. Gg; donc $AZ \times Gg = GZ \times AG$; & partant $FA \times Gm = AZ \times Gg$, d'où je tire FA. AZ :: Gg. Gm, c'eſt-à-dire encore la puiſſance FA eſt à la peſanteur abſolue AZ ou au poids A comme le ſinus Gg de l'angle d'inclinaiſon du plan ſur ſa baſe eſt au ſinus Gm de l'angle GAm, complement à l'angle droit de l'angle de traction ALG; & il eſt viſible que les puiſſances qui paſſent par l'angle EAr oppoſé au ſommet à l'angle TAG, ſont auſſi au poids comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus du complement à l'angle droit de l'angle de traction; car ces puiſſances en pouſſant le corps, font le même effet que les autres en le tirant.

321. COROLLAIRE II. Il ſuit de-là, que quoiqu'on puiſſe dire que toutes les puiſſances obliques au plan incliné BC, & qui ſont en équilibre avec le corps A, ſont à ce corps comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus du complement de l'angle de traction. Cependant il ne s'enſuit pas que toutes les puiſſances qui ſont au poids comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de complement de l'angle de traction ſoient en équilibre avec le corps; car nous avons vû que les puiſſances qui paſſent par les angles QAE, GAZ ne peuvent être en équilibre avec A.

322. COROLLAIRE III. Quand la direction FA (*Fig.* 143.) eſt horizontale ou paralelle à la baſe OC, la puiſſance FA eſt à la peſanteur abſolue AZ ou au poids A comme la hauteur BO du plan incliné eſt à ſa baſe OC; car alors le ſinus Gm de l'angle de complement de l'angle de traction eſt égal à la droite Ag, laquelle dans le triangle AGg eſt le ſinus de l'angle AGg complement à l'angle droit de l'angle GAg égal à l'angle d'inclinaiſon BCO; ainſi l'angle AGg eſt égal à l'angle OBC du triangle OBC, lequel eſt auſſi le complement à l'angle droit de BCO; donc puiſque la puiſſance eſt au poids comme Gg eſt à Ag, & que Gg. Ag : : BO. OC, la puiſſance eſt auſſi au poids comme la hauteur BO eſt à la baſe OC.

323. COROLLAIRE IV. De toutes les puiſſances qui ſont en équilibre avec le corps A (*Fig.* 140.) la plus petite eſt celle dont la direction MA eſt paralelle au plan incliné, & les autres ſont d'autant plus grandes qu'elles s'éloignent de part & d'autre de celle-ci. Ce qui eſt évident par la ſeule inſpection de la Figure, après ce qui a été dit ci-deſſus.

324. PROPOSITION LIII. *Si deux corps* B, A, (Fig. 144.) *ſe tiennent en équilibre ſur deux plans inclinés* CE, ED *avec des directions*

rections BH, HA *paralelles aux plans inclinés, ces deux corps sont entr'eux réciproquement comme les sinus des angles d'inclinaison de leurs plans, c'est-à-dire* B *est à* A *comme le sinus de l'angle* CDE *est au sinus de l'angle* DEC.

Supposons qu'une puissance mise en H soit en équilibre avec le corps A, & nommons V la puissance H, S le sinus de l'angle d'inclinaison CDE, *s* le sinus de l'angle d'inclinaison CED, & R le sinus total, nous aurons V. A :: S. R. (*N.* 316.) & partant $V\times R = S\times A$.

Les deux corps A & B étant en équilibre ont des forces égales, & par conséquent la même V qui soutiendroit le corps A selon la direction HA, soutiendroit aussi le corps B avec la direction HB; mettant donc cette puissance au lieu du corps A, nous aurons V. B :: *s*. R, & partant $V\times R = B\times s$; mais nous venons de trouver $V\times R = S\times A$; donc $B\times s = S\times A$; d'où je tire B. A :: S. *s*.

Si les hauteurs de deux plans inclinés sont égales, les deux corps sont entr'eux comme les longueurs des plans inclinés. Car à l'égard du plan incliné CD, nous aurons S. R :: CP. CD (*N.* 316.) & partant V. A :: CP. CD, ce qui donne $V\times CD = A\times CP$, ou $V = \frac{A\times CP}{CD}$; & à l'égard du plan incliné CE, nous aurons *s*. R :: CP. CE; donc V. B :: CP. CE, ce qui donne $V\times CE = B\times CP$, ou $V = \frac{B\times CE}{CP}$; donc $\frac{A\times CP}{CD} = \frac{B\times CP}{CE}$, ou $\frac{A}{CD} = \frac{B}{CE}$; ainsi multipliant par CD & par CE, nous aurons $A\times CE = B\times CD$; d'où je tire A. B :: CD. CE.

325. COROLLAIRE. *Si deux corps* B, A, (Fig. 145.) *se tiennent en équilibre sur deux plans inclinés* EC, HD *avec une direction paralelle à la base* CD, *les deux corps* B, A *sont entr'eux en raison composée de la raison inverse des sinus des angles* C, D *d'inclinaison des plans & de la raison directe des sinus des angles de complement des angles de traction.*

Nommons S le sinus de l'angle ECD, *s* le sinus de l'angle HDC, T le sinus de complement de l'angle de traction BMC, *t* le sinus de complement de l'angle de traction AND, & V la puissance qui soutiendroit le corps A en équilibre avec la direction MA; nous aurons donc V. A :: *s*. *t*, & partant $Vt = As$ ou $V = \frac{As}{t}$; or, la même puissance V seroit aussi en équilibre

avec B; donc V. B :: S. T. (*N.* 320.) & par conséquent VT $= BS$ & $V = \frac{BS}{T}$; donc $\frac{AS}{s} = \frac{BS}{T}$, ou $AsT = BSs$, d'où je tire B. A :: sT. Ss; or la raison sT. Ss est composée de la raison s. S qui est l'inverse de la raison des sinus S, s, & de la raison directe T, t des sinus des complemens des angles de traction. Donc, &c

Si les hauteurs EP, HR des plans inclinés sont égales, les corps B, A sont entr'eux comme les bases CP, RD de leurs plans inclinés; car à l'égard du plan incliné HD, nous aurons V. A :: HR. RD. (*N.* 322.) donc $V = \frac{A \times HR}{RD}$; & à l'égard du plan incliné EC, nous aurons V. B :: EP. ou HR. PC, & partant $V = \frac{B \times HR}{PC}$; donc $\frac{A \times HR}{RD} = \frac{B \times HR}{PC}$ ou $\frac{A}{RD} = \frac{B}{PC}$, ou enfin $A \times PC = B \times RD$; donc B. A :: PC. RD.

326. Corollaire II. Si les deux corps B, A, (*Fig.* 146.) étoient en équilibre sur les plans inclinés EC, ED avec des directions HB, HA obliques au plan, on trouveroit comme cidessus (*N.* 324.) que les deux corps A & B seroient entr'eux en raison composée de la raison inverse des sinus des angles d'inclinaison, & de la raison directe des sinus des angles de complement des angles de traction.

327. Proposition LIV. *Un corps qui descend le long d'un plan incliné, descend avec un mouvement uniformement acceleré.*

La pesanteur absolue d'un corps A qui descend le long d'un plan incliné BC (*Fig.* 147.) est à sa pesanteur relative, comme la longueur BC du plan est à sa hauteur BO (*N.* 313.) c'est-à-dire que si le corps descendant librement vers le centre de la terre décrivoit dans un certain tems un espace égal à BO, cet espace seroit à l'espace BA que le même corps décriroit dans le même tems sur le plan incliné comme la longueur BC est à la hauteur BO. Supposant donc que le corps tombant librement employât deux tems à parcourir BO, l'espace BP parcouru dans le premier tems seroit à l'espace BO parcouru dans les deux premiers comme le quarré 1 du premier tems est au quarré 4 des deux premiers. Or l'espace BP parcouru dans le premier tems, est à l'espace BR que le corps parcoureroit dans le même tems sur le plan incliné comme BC. BO, c'est-à-dire BP. BR :: BC. BO, & l'espace BO parcouru dans les deux premiers tems, est

à l'espace BA que le corps parcoureroit dans les mêmes deux premiers tems, aussi comme BC. BO, c'est-à-dire BO. BA. :: BC. BO; donc BP. BR. :: BO. BA, ou BP. BO. :: BR. BA; mais BP. BO. 1. 4. donc BR. BA. :: 1. 4. & par conséquent le mouvement du corps A le long du plan incliné BC est acceleré, puisque les espaces parcourus BR, BO, sont entr'eux comme les quarrés 1. 4. des tems 1. 2. employés à les parcourir.

328. COROLLAIRE. Donc, tout ce que nous avons dit à l'égard du mouvement acceleré des corps qui descendent librement vers le centre de la terre doit se dire aussi du mouvement acceleré des corps qui descendent le long des plans inclinés. Ainsi, 1°. Les espaces parcourus à la fin d'un premier tems, des deux premiers, des trois premiers, & sont entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir. 2°. Les vitesses acquises à la fin des espaces sont entr'elles comme les racines quarrées des espaces, ou comme les tems employés à parcourir les espaces. 3°. Si le corps se mouvoit avec une vitesse uniforme égale à la vitesse acquise à la fin d'un espace parcouru pendant un certain tems, ce corps dans un tems égal à celui-là parcoureroit un espace double. 4°, Enfin, si le corps avec la vitesse acquise à la fin du plan incliné remontoit le long de ce plan, il monteroit aussi haut qu'il seroit descendu dans un tems égal à celui qu'il auroit employé à descendre.

329. COROLLAIRE II. *La vitesse qu'un corps* A *a acquise en parcourant sur un plan incliné* BC *un espace* BA *dans un tems déterminé, est à la vitesse qu'il auroit acquise en descendant librement vers le centre de la terre dans un tems égal, comme la hauteur* BO *du plan incliné est à sa longueur* BC.

L'espace BO que le corps auroit parcouru en descendant librement, est à l'espace BA parcouru dans le même tems sur le plan incliné comme BC est à BO; or avec la vitesse acquise à la fin de l'espace BO, le corps mû uniformément parcoureroit un espace double de BO dans un tems égal à celui qu'il a employé à descendre le long de BO (par les regles du mouvement acceleré) & avec la vitesse acquise à la fin de BA, il parcoureroit uniformément un espace double de BA; donc les espaces parcourus dans un même tems dans ces deux mouvemens uniformes seroient entr'eux comme 2BO est à 2BA, ou comme BO est à BA, & par conséquent comme la longueur BC est à la hau-

teur BO. Mais dans le mouvement uniforme les viteſſes ſont comme les eſpaces parcourus dans les mêmes tems; donc les deux viteſſes uniformes ſeroient entr'elles comme BC eſt à BO; or ces deux viteſſes ſont les mêmes que les viteſſes acquiſes à la fin des eſpaces BO. BA; donc la viteſſe acquiſe à la fin de BA eſt à la viteſſe à la fin de BO parcouru dans un même tems que BA, comme la hauteur BO du plan eſt à ſa longueur BC, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus total (*N.* 316.)

330. PROBLEME. *Connoiſſant l'eſpace* BP (Fig. 147.) *qu'un corps parcoureroit en deſcendant librement vers le centre de la terre pendant un certain tems, connoître l'eſpace qu'il doit parcourir ſur un plan incliné* BC *pendant le même tems.*

Du point P, j'abbaiſſe ſur le plan incliné la perpendiculaire PR, & l'eſpace BR eſt l'eſpace demandé. Car les triangles rectangles PBR, OBC ſont ſemblables à cauſe de l'angle aigu commun PBR. Donc PB. BR :: BC. BO.

331. PROBLEME. *Connoiſſant l'eſpace* AH (Fig. 148.) *qu'un corps parcoureroit en deſcendant librement vers le centre de la terre pendant un certain tems, connoître les eſpaces qu'il parcoureroit s'il deſcendoit ſucceſſivement ſur des plans inégalement inclinés* AM, AN, AP, &c. *pendant des tems égaux à celui qu'il a employé à deſcendre.*

Du point H, je mene ſur les plans inclinés les perpendiculaires NR, NS, NT, &c. & les droites AR, AS, AT, &c. ſont les eſpaces demandées; car les triangles ſemblables AMH, ARH donnent AR. AH :: AH. AM; donc l'eſpace AR eſt parcouru ſur le plan incliné AM dans un tems égal à celui que le corps a employé à parcourir AH: & on prouvera de même à l'égard du plan incliné AN, que AS. AH :: AH, AN, & ainſi des autres.

332. COROLLAIRE Ier. *Les viteſſes acquiſes à la fin des eſpaces* AR, AS, AT, &c. *ſont entr'elles comme ces eſpaces.*

Nommant V la viteſſe acquiſe à la fin de AH, T la viteſſe acquiſe à la fin de AR, & X la viteſſe acquiſe à la fin de AS, nous aurons à l'égard du plan incliné AM. T. V :: RA. AH (*N.* 329.) & $T \times AH = V \times RA$; & à l'égard du plan incliné AN, nous aurons X. V :: AS. AH, ce qui donne $X \times AH = V \times AS$; donc $T \times AH$. $X \times AH$ :: $V \times RA$. $V \times AS$, ou en diviſant par AH la premiere raiſon, & par V la ſeconde T. X :: AR. AS.

Et on prouvera de la même façon que ces viteſſes ſont entr'elles comme les ſinus des angles d'inclinaiſon des plans; car nommant R le ſinus total, M l'angle d'inclinaiſon du plan AM, & *m*

l'angle d'inclinaison du plan AN, nous aurons à l'égard du plan AM, T. V :: M. R. (*N.* 329.) ou TR = VM; & à l'égard du plan AN, nous aurons X. V :: *m*. R, ou XR = V*m*; donc TR. XR :: VM. V*m*, ou T. X :: M. *m*.

333. Corollaire II. Tous les triangles HAR, HAS, HAT, &c. étant rectangles sur la même base AH, le cercle décrit avec le diamétre AH passe par tous les sommets R, S, T, &c. de ces triangles, ce qui nous fait voir que si de l'extrêmité A du diamétre AH d'un cercle AHB on mene tant de cordes AR, AS, AT, &c. que l'on voudra, un corps n'employeroit pas plus de tems à descendre le long du diamétre AH qu'à descendre le long de la corde AR, ou de la corde AS, ou de la corde AT, &c. c'est-à-dire que toutes les cordes seroient parcourues dans des tems égaux à celui que le corps employeroit à tomber de la hauteur AH.

Bien plus, si de l'autre extrêmité H du diamétre on mene tant de cordes HR, HS, HT, &c. que l'on voudra, chacune de ces cordes sera encore parcourue dans un tems égal à celui que le corps employeroit à tomber de la hauteur AH. Ce que je démontre ainsi.

Du point A je mene la tangente AL; je prolonge la corde HR jusqu'à ce qu'elle coupe la tangente en L, & du point L j'abaisse la perpendiculaire LI sur HM; quand le corps mis au point R du plan incliné LH aura parcouru l'espace RH, cet espace sera à celui qu'il auroit parcouru dans le même tems s'il étoit descendu librement vers le centre de la terre comme la hauteur LI ou AH du plan incliné est à sa longueur LH; or les triangles rectangles LAH, RAH étant semblables donnent AH. LH :: RH. AH; donc l'espace RH que le corps a parcouru sur LH, est à celui qu'il auroit parcouru dans le même tems en descendant librement vers le centre de la terre comme RH est à AH; ainsi nommant x l'espace que le corps auroit parcouru librement, nous aurons RH. x :: RH. AH, & par conséquent x = AH, c'est-à-dire AH est l'espace que le corps auroit parcouru en tombant vers le centre de la terre pendant un tems égal à celui qu'il a employé à parcourir la corde RH; & on prouvera la même chose à l'égard des autres cordes AS. AT, &c.

334. Proposition LV. *La vitesse qu'un corps a acquise lorsqu'il est descendu le long d'un plan incliné* AM (Fig. 148.) *est*

égale à celle qu'il auroit acquise s'il étoit tombé librement de la hauteur AH *de ce plan.*

Pour abreger le discours, je nommerai *u*AR la vitesse acquise à la fin de l'espace AR, *u*AM la vitesse acquise à la fin de l'espace AM, & *u*AH la vitesse acquise par la chute AH. Nous avons *u*AR. *u*AH :: AR. AH. (*N.* 329.) & à cause que les espaces AR, AM sont parcourus d'un mouvement acceleré, nous avons aussi *u*AR. *u*AM :: $\sqrt{}$AR. $\sqrt{}$AM ; or les triangles semblables RAH, MAH donnent RA. AH :: AH. AM; donc $\overline{RA}^2$. $\overline{AH}^2$ :: RA. AM; & tirant la Racine quarrée, nous avons RA. AH :: $\sqrt{}$AR. $\sqrt{}$AM; donc *u*AR. *u*AM :: RA. AH; or nous avons aussi trouvé *u*AR. *u*AH :: RA. AH; donc *u*AR. *u*AM :: *u*AR. *u*AH, & par conséquent *u*AM = *u*AH.

335. COROLLAIRE I[er]. De-là il suit que si un ou plusieurs corps descendant le long de plusieurs plans diversement inclinés AM, AN, AP, &c. dont la hauteur AH est la même, les vitesses acquises à la fin de ces plans sont toutes égales entr'elles, puisqu'elles sont égales chacune à la vitesse acquise par la chute AH.

336. COROLLAIRE. De-là il suit encore que si un corps descend le long de plusieurs plans diversement inclinés AM, MN, NR, &c. (*Fig.* 149.) la vitesse acquise à la fin du dernier plan en R est égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur AV égale à la somme des hauteurs des plans. Ce que je prouve ainsi.

Du point A je mene AT paralelle à l'horizon, & je prolonge les plans NM, RN jusqu'à ce qu'ils coupent AT aux points H, T. La vitesse acquise à la fin du plan AM est égal à la vitesse qu'il auroit acquise en descendant le long du plan MH, dont la hauteur AS est la même que celle du plan AM; ainsi ce corps continuant à se mouvoir le long de MN, la vitesse acquise à la fin des deux plans AM, MN sera la même que la vitesse qu'il auroit acquise s'il étoit descendu le long de NH. Mais celle-ci est égale à celle qu'il auroit acquise s'il étoit descendu le long du plan NT, à cause que les deux plans NT, NH ont la même hauteur AP; donc la vitesse acquise le long des deux plans AM, MN est égale à celle qui auroit été acquise le long du seul plan TN. C'est pourquoi ce corps continuant à se mouvoir le long de NR, sa vitesse acquise en R le long des trois plans AM, MN, NR est égale à la vitesse qu'il auroit acquise le long de TR. Mais celle-ci est

égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur AV du plan TR. Donc, &c.

337. COROLLAIRE. Toute courbe AM (*Fig.* 150.) n'étant autre chose qu'un polygone d'une infinité de côtés qui sont des plans diversement inclinés, il s'ensuit que la vitesse qu'un corps a acquise en descendant le long d'une courbe est égale à celle qu'il auroit acquise s'il étoit tombé de la hauteur AV de cette courbe.

338. PROPOSITION LVI. *Le tems qu'un corps employe à parcourir un plan incliné* AM, (Fig. 148.) *est au tems qu'il employeroit à parcourir la hauteur* AH *comme la longueur* AM *du plan incliné est à la hauteur* AH.

Du point H, je mene sur le plan la perpendiculaire HR, & l'espace AR est l'espace que le corps parcoureroit sur le plan incliné dans un tems égal à celui qu'il employeroit à tomber de la hauteur AH, (*N.* 330.) or à cause que le mouvement sur le plan incliné est uniformement acceleré, le tems employé à parcourir l'espace AR est au tems employé à parcourir l'espace AM comme $\sqrt{AR}$ est à $\sqrt{AM}$; donc le tems employé à tomber de la hauteur AH est aussi au tems employé à parcourir la longueur AM comme $\sqrt{AR}$ est à $\sqrt{AM}$; mais à cause des triangles semblables RAH, MAH, nous avons AR. AH :: AH. AM; donc $\overline{AR}^2$. $\overline{AH}^2$ :: AR. AM, & partant AR. AH :: $\sqrt{AR}$. $\sqrt{AM}$; ainsi le tems employé à parcourir la hauteur AH est au tems de la descente le long de AM comme AR est à AH, ou comme AH est à AM; & par conséquent le tems de la descente le long de AM est au tems de la chute AH comme la longueur AM est à la hauteur AH.

339. COROLLAIRE. *Donc les tems employés à parcourir divers plans inclinés qui ont la même hauteur* AH (Fig. 148.) *sont entr'eux comme les longueurs de ces plans.* Car nommant T le tems de la chute AH, X, le tems de la descente le long du plan AM & x, le tems de la descente le long du plan AN, nous aurons par rapport au plan AM, X. T :: AM. AH, donc $X \times AH = T \times AM$, & par rapport au plan AN, nous aurons x. T :: AN. AH, ce qui donne $x \times AH = T \times AN$, donc $X \times AH$. $x \times AH$ :: $T \times AM$. $T \times AN$ ou X. x :: AM. AN, & ainsi des autres.

Des Puissances qui tirent des Poids avec des cordes.

340. Proposition LVII. *Si deux puissances* A, B *qui tirent un poids* P (Fig. 151.) *avec des cordes* MC, NC *sont exprimées par les parties* MC, NC *de leurs directions qui forment le paralellogramme* MENC *dont la diagonale* CE *prise sur la direction du poids, exprime la force de ce poids* P, *les deux puissances & le poids sont en équilibre, & si les deux puissances ne sont pas exprimées par les côtés* MC, NC *du paralellogramme* MENC, *il ne sçauroit y avoir d'équilibre entre les puissances & le poids.*

La force MC qui tire de C en M, & la force NC qui tire de C en N, composent la force CE qui tireroit de C en E; car celle-ci leur est équivalente; or, la force CE est égale & contraire à la force EC du poids, à cause que ce poids tire selon la direction contraire EC, donc la force EC est en équilibre avec le poids P, & par conséquent les deux forces MC, NC, c'est-à-dire les deux puissances A & B sont aussi en équilibre avec le poids P.

Maintenant si les deux puissances A & B ne sont pas exprimées par les côtés MC, NC du rectangle, elles seront exprimées par des lignes moindres ou plus grandes que les deux MC, NC qui seront ou proportionnelles à MC, NC ou non proportionnelles.

Supposons d'abord qu'elles soient exprimées par les droites RC, CS (*Fig.* 152.) moindres mais proportionnelles aux deux MC, NC, j'acheve le paralellogramme RTSC, lequel sera semblable au paralellogramme MENC, & par conséquent la diagonale CT sera aussi moindre que la diagonale EC, mais l'une & l'autre auront la même direction. Or, les forces composantes RC, CS agiront sur le poids de la même façon que la composée TC qui tireroit de T en C, & celle-ci étant moindre que la force contraire EC du poids ne sçauroit être en équilibre avec le poids; donc les puissances A & B ne sçauroient non plus soutenir le poids.

Si au contraire les puissances A & B sont exprimées par les droites HC, CL plus grandes mais proportionnelles aux deux MC, NC, la diagonale XC de leur paralellogramme HXLC sera plus grande que EC, & l'une & l'autre auront encore la même direction, c'est pourquoi les puissances agissant sur le poids avec la force XC contraire & plus grande que la force EC du poids l'enleveront, & il n'y aura point d'équilibre.

Si

Si les deux puiſſances A, B (*Fig.* 153.) étoient exprimées par les lignes RC, SC moindres que les deux MC, NC ſans leur être proportionnelles, alors achevant le paralellogramme RTSC, les forces RC, SC ſeroient équivalentes à la force TC qui tireroit de C en T; c'eſt-à-dire que les deux forces RC, SC agiroient autant ſur le poids P que la ſeule force TC qui tireroit de C en T; or, la direction TC étant oblique à la direction du poids P, je mene TH perpendiculaire ſur la direction du poids, & achevant le paralellogramme THCX, la force TC eſt compoſée de la force CX qui tire de C en X, & de la force CH qui tire de C en H, mais dans le cas preſent la force CH eſt moindre que la force EC du poids; ainſi le poids entraînera la force CH, & quant à la force CX rien ne l'empêchera d'agir, & par conſéquent il n'y aura point d'équilibre entre les deux puiſſances & le poids.

Et par des ſemblables raiſonnemens, on prouvera toujours que l'équilibre ne ſçauroit ſubſiſter entre les puiſſances & le poids, ſoit que les lignes RC, SC ſoient chacune plus grandes que les deux MC, NC ſans leur être proportionnelles, ſoit que l'une ſoit plus grande & l'autre plus petite.

Que ſi l'on veut que les directions AC, BC (*Fig.* 154.) des puiſſances A, B ſoient ſur une même ligne droite & contraires l'une à l'autre; il n'y aura pas non plus d'équilibre entre les deux puiſſances & le poids P; car ſi les deux forces MC, NC des puiſſances ſont horizontales, & qu'elles ſoient égales, elles ſeront en équilibre entr'elles, & pendant ce tems-là le poids P tirant de E en C & ne trouvant rien qui lui reſiſte ne s'arrêtera pas, ainſi il n'y aura point d'équilibre. Que ſi la force MC eſt plus grande que NC, la force MC entraînera NC avec elle; mais comme elle n'eſt compoſée d'aucune force oppoſée à la force EC du poids, ce poids agira toujours, & l'équilibre manquera non-ſeulement du côté des deux puiſſances, mais encore du côté du poids.

Enfin, ſi les deux puiſſances A, B (*Fig.* 155.) tirent avec des directions contraires MC, NC qui ſont ſur une ligne droite oblique à l'horizon, il n'y aura pas non plus d'équilibre entre les puiſſances & le poids: car menant des points M, N, les droites MR, NT perpendiculaires ſur la direction du poids, & achevant les paralellogrammes rectangles MRCX, & NZCT, la force MC ſera compoſée de la force RC qui tire de C en R, & de la force

CX qui tire de C en X, & la force NC sera composée de la force CT qui tire de C en T, & de la force CZ qui tire de C en Z; c'est pourquoi si CT est égal à CR, ces deux forces seront en équilibre, & ne pourront empêcher le poids de descendre, & dans ce cas les forces CX, CZ seront égales aussi & en équilibre; à cause qu'elles sont contraires, car les triangles semblables MRC, CTN ayant par la supposition le côté RC égal au côté CT seront parfaitement égaux, & l'on aura MR ou CX = TN ou CZ; il n'y aura donc point d'équilibre, puisque rien n'arrêtera la pesanteur du poids.

Si la force RC est moindre que la force CT, le mouvement du poids P sera augmenté par l'excès de la force CT sur la force CR, ainsi le poids ne sera pas retenu, & de plus la force CX étant en ce cas moindre que la force CZ toujours par la raison des triangles semblables MCX, ZCN, la force CZ entraînera par conséquent la force CX, donc point d'équilibre ni du côté des puissances ni du côté du poids.

Et on prouvera la même chose si la force RC étoit plus grande que la force CT; car quoiqu'il pût arriver que l'excès de la force RC sur CT fût égal à la force du poids, auquel cas la force RC seroit en équilibre avec le poids, cependant la force CX qui seroit alors plus grande que la force CZ entraîneroit CZ, & par conséquent point d'équilibre entre les puissances & le poids.

341. *Si deux puissances* A, B (Fig. 151.) *sont en équilibre avec un poids* P *qu'elles soutiennent avec des cordes ; ces deux puissances sont entr'elles réciproquement comme les sinus des angles* ECN, ECM *que leurs directions sont avec la direction* EC *du poids.*

Dans le triangle ENC le côté EN est au côté NC comme le sinus de l'angle ECN est au sinus de l'angle CEN ou de l'angle ECM qui lui est alterne ; or, EN = MC donc la puissance A exprimée par MC est à la puissance B exprimée par NC réciproquement comme le sinus de l'angle ECN fait par la direction BC de la puissance B avec la direction EC du poids, est au sinus de l'angle MCE fait par la direction AC de la puissance A avec la direction EC du même poids.

342. Donc si du point E on mene ER perpendiculaire sur BC, & ES perpendiculaire sur AC, la puissance A est à la puissance B comme la perpendiculaire ER est à la perpendiculaire ES; car prenant pour sinus total la droite EC, la perpendiculaire ER est le sinus de l'angle ECB, & la perpendiculaire ES est le sinus de l'angle ECA.

343. *Si deux puiſſances* A, B (Fig. 151.) *ſoutiennent un poids* P *avec des cordes, la puiſſance* A *eſt au poids* P *comme le ſinus de l'angle* BCE *fait par la direction de l'autre puiſſance* B *avec la direction* EC *du poids, eſt au ſinus de l'angle* ACB *fait par les directions des deux puiſſances.*

Dans le triangle ECN, le côté EN ou MC eſt au côté EC comme le ſinus de l'angle ECB eſt au ſinus de l'angle ENC ou de l'angle ACB qui eſt le complement à deux droits de l'angle ENC. Donc la force MC ou la puiſſance A eſt à la force EC ou au poids P comme le ſinus de l'angle ECB eſt au ſinus de l'angle MCN ou ACB.

Et on prouvera de même que la puiſſance B eſt au poids comme le ſinus de l'angle ECM eſt au ſinus de l'angle BCA.

344. On peut remarquer en paſſant une choſe aſſez ſinguliere qui eſt que ſi deux puiſſances, quelques grandes qu'elles puiſſent être, tirent un poids avec des cordes, quelque petit que puiſſe être ce poids, ces deux puiſſances ne pourront jamais tendre leurs cordes, de façon qu'elles ſoient en ligne droite (*Fig.* 154. 155.), car en ce cas l'équilibre ſera toujours rompu, comme on a vû ci-deſſus.

345. On peut encore obſerver que ſi un poids P eſt attaché à un point fixe E (*Fig.* 156.), d'où il pend librement, c'eſt-à-dire en ſorte que ſa direction EP ſoit perpendiculaire à l'horizon, la plus petite puiſſance qu'on puiſſe imaginer peut le déranger de ſa direction; car ſuppoſons que la force du poids ſoit exprimée par la droite EC, & qu'une puiſſance quelque petite qu'elle ſoit pouſſe le poids ſelon la direction horizontale CR qui exprime la force de cette puiſſance; j'éleve du point C la perpendiculaire CR, & du point R, je mene la droite RE, & j'acheve le paralellogramme CRXE, la force ER tirant de R en E eſt compoſée de la force CR tirant de R en C ou pouſſant de C en R, & de la force CE tirant de C en E; or la force CE, c'eſt-à-dire la reſiſtance du point fixe E eſt égale à la force EC du poids, & par conſéquent ces deux forces étant en équilibre rien n'empêche la force CR d'agir de C juſqu'en R où elle ſe trouvera en équilibre avec la force RX du poids, & la force ER qui ſera alors la force reſiſtante du point E, & on prouveroit la même choſe ſi RC étoit oblique à l'horizon.

346. PROBLEME. *Deux puiſſances* A & B (Fig. 157.) *ſoutenant un poids* P *avec des cordes* AC, BC, *trouver la partie du poids que chacune d'elles ſoutient.*

Je décris le paralellogramme AEBC qui exprime les forces des puissances & celle du poids; du point C, je mene la droite horizontale TV, des points A & B, je mene les droites AT, BV perpendiculaires sur l'horizontale TV, & les droites AS, BR perpendiculaires sur la direction CE du poids, ce qui me donne les triangles rectangles ATC, ERB semblables & égaux, à cause de AC = EB, & par conséquent TC = RB ou CV, & AT ou SC = ER.

La force AC tirant de C en A est composée de la force AS ou TC tirant de C en T, & de la force CS tirant de C en S; & la force BC tirant de C en B est composée de la force CV tirant de C en V, & de la force CR tirant de C en R. Or, la force TC étant égale & contraire à la force CV, ces deux forces sont en équilibre & n'agissent point sur le poids; donc il n'y a que les forces AT ou ER & CR qui soutiennent le poids, & par conséquent la partie que la puissance A soutient est exprimée par ER, & celle que la puissance B soutient, est exprimée par RC.

Si l'une des puissances B tire avec une direction horizontale BC (*Fig.* 158.), l'autre puissance est composée de la force CE qui tire de C en E, & de la force CT qui tire de C en T; or, CT étant égale & contraire à la force CB, est par conséquent en équilibre avec la puissance B, & par la même raison la force CE est en équilibre avec la force EC du poids; ainsi la puissance A soutient toute seule le poids P.

Si l'une des puissances B tire le poids avec une direction CB en dessous de l'horizontale TV (*Fig.* 159.) la force AC est composée de la force CT qui tire de C en T, & de la force CS qui tire de C en S; & la force CB est composée de la force CV qui tire de C en V, & de la force CR qui tire de C en R; or, la force CT est égale à la force CV, à cause des triangles rectangles semblables & égaux ASE, CBV qui donnent CV = AS = CT, & par conséquent ces deux forces étant contraires se tiennent en équilibre. Mais à cause des triangles semblables & égaux ASE, CBR, nous avons CR = ES; donc la partie ES de la force CS est en équilibre à la force CR, & l'autre partie CE de la même force CS est en équilibre avec la force EC du poids; ainsi la puissance qui agit sur le poids avec la force CS est égale à la force EC de ce poids, & à la force RC, c'est-à-dire que cette puissance soutient non-seulement le poids, mais encore l'effort RC que l'autre puissance B fait selon la direction RC.

347. On pourroit aisément conclure de-là que deux puissances qui soutiennent un poids avec des cordes & des directions obliques à celle du poids, sont ensemble plus grandes que le poids : mais on le prouvera plus aisément en faisant attention que ces deux puissances doivent toujours être exprimées par les côtés AC, BC d'un paralellogramme ACBE (*Fig.* 157, 158, 159.) dont la diagonale EC exprime la force du poids ; or, les deux côtés AC, CB ou AC, AE d'un paralellogramme sont ensemble plus grand que la diagonale. Donc, &c.

Des Leviers.

348. Toute barre de fer ou de bois en ligne droite, se nomme *Levier*, comme nous avons déja dit ailleurs, & ordinairement on le considére comme n'ayant aucune pesanteur.

Il y a trois espéces de Levier, selon les trois différentes positions dans lesquelles la puissance & le poids ou deux puissances ou deux poids peuvent se trouver à l'égard du point sur lequel le Levier est appuyé. Si la puissance A & le poids P (*Fig.* 160.) sont posés, de sorte que le point d'appui C soit entre-deux, le Levier se nomme Levier de la *premiere espéce ;* si le poids P (*Fig.* 161.) se trouve entre la puissance A & le point d'appui C, le Levier se nomme Levier de la *seconde espéce ;* enfin, si la puissance A se trouve entre le poids P (*Fig.* 162.), & le point d'appui C, le Levier se nomme Levier de la *troisiéme espéce ;* & comme on ne peut pas trouver d'autres différentes positions de la puissance & du poids à l'égard du point, il n'y a pas non plus d'autre espéce de Levier droit.

Mais il y a un autre Levier ACP (*Fig.* 163.) qu'on nomme *Levier coudé*, à cause qu'il fait un angle ou un coude au point d'appui C, de façon que la puissance A est à l'un des bras AC, & le poids P à l'autre bras PC.

349. Proposition LVIII. *Dans les trois Leviers des trois différentes espéces* (Fig. 160. 161. 162.), *si la puissance* A *& le poids* P *agissent avec des directions perpendiculaires au Levier, & qu'il y ait équilibre entr'eux, la puissance est au poids réciproquement comme la distance* PC *du poids* P *au point d'appui* C *est à la distance* AC *de la puissance* A *au même point* C.

La puissance ne peut décrire l'arc AH à moins que dans le même tems le poids P ne décrive l'arc PR, ainsi les vitesses de la

puissance & du poids sont entr'elles comme les arcs AH, PR décrits en même-tems ou comme les rayons AC, CP qui sont proportionnels aux arcs AH, PR, à cause des secteurs semblables ACH, PCR; donc la force que la puissance employe est à celle du poids, comme $A \times AC$ est à $P \times PC$, mais par la supposition $A \times AC = P \times PC$, puisqu'il y a équilibre entre les deux forces, donc A. P :: PC. AC.

350. Dans les leviers de la premiere & seconde espéce (*Fig.* 160. 161.), plus le point C est proche du poids, plus la puissance A qui soutient le poids devient moindre à l'égard du poids, & par conséquent ces deux machines sont très-utiles pour enlever des grands poids avec des petites forces en leur ajoutant quelque chose de plus qu'il ne leur faut pour être en équilibre avec les poids.

Mais quant au levier de la troisiéme espéce (*Fig.* 162.), la puissance A est toujours plus grande que le poids P, puisque PC est toujours plus grande que AC, ainsi ce levier loin d'aider la puissance, la surcharge & par conséquent cette machine est inutile.

351. Si la puissance & le poids tirent avec des directions AE, PH (*Fig.* 164.) paralelles entr'elles, mais obliques au levier, ou plutôt si deux puissances A & P tirent le levier avec des directions paralelles AE, PH & obliques au levier, & que ces deux puissances soient en équilibre en supposant que le levier AR est attaché fixement au point d'appui C, ensorte qu'il puisse tourner autour de ce point sans pouvoir glisser de C en A ou de C en P; je dis que ces deux puissances sont encore entr'elles réciproquement comme leurs bras du levier, c'est-à-dire A. P :: CP. PA.

Je prens sur les directions AE, PH, les parties AE, PH telles que l'on ait AE. PH :: PC. CA, & je suppose que les forces que les puissances A & P employent en tirant le levier soient exprimées par les droites AE, PH; du point E je mene ER paralelle au levier, & du point A la droite AR perpendiculaire au même levier; ainsi la force AE qui tire de A en E est composée de la force AR qui tire de A en R, & de la force RE ou EL qui tire de E en L, c'est-à-dire que si la puissance A tire avec une corde AE, & une direction exprimée par AE, elle fera le même effet que deux forces, dont l'une tireroit avec une corde & une direction exprimée par AR, & l'autre tireroit avec une corde & une direction exprimée par AL.

Faisant la même construction par rapport à la puissance P,

nous trouverons que la puissance P tirant avec une corde & une direction égale à PH, fait le même effet que deux forces, dont l'une tireroit avec une corde & une direction exprimée par PQ, & l'autre tireroit avec une corde & une direction exprimée par PS. Or, les triangles rectangles AER, PHR étant semblables, donnent AE. PH :: AR. PQ, & nous avons AE. PH :: PC. AC, donc AR. PQ :: PC. AC, & par conséquent les forces AR, PQ perpendiculaires sur le levier, sont en équilibre entr'elles, puisqu'elles sont réciproquement comme leur bras de levier (*N*.349.).

Or les forces AL, PS qui tirent d'un même côté, & qui trouvent un obstacle invincible au point d'appui C sont en équilibre avec cet obstacle, donc les puissances A & P doivent être en équilibre autour du point fixe C.

352. Ce ne seroit pas la même chose si le levier étoit simplement appuyé sur le point C sans y être fixement attaché, & que la puissance & le poids tirassent avec des cordes; car alors la force resistante resisteroit ou avec une direction TC perpendiculaire au levier, ou avec une direction XC paralelle aux directions des puissances. Si elle resistoit avec une direction TC perpendiculaire sur le levier, elle resisteroit avec une force égale aux deux AR, PQ, & par conséquent elle seroit en équilibre avec ces deux forces, mais comme les deux AL, PS qui tirent d'un même côté, ne trouveroient point de resistance de la part de cette force TC qui appuye simplement le levier AP sans y être attachée en aucune façon, ces deux forces pousseroient le levier vers A, & dans l'instant l'équilibre se romproit.

Que si la force resistante resiste avec une direction XC paralelle aux directions AE, PH des puissances A, P, cette force sera composée de la force XZ qui repousse le levier de X en Z, & qui sera égale aux deux AR, PQ, & de la force XT, ou ZC qui pousseroit le levier de Z en C dans un sens contraire aux forces AL, PS, si l'on supposoit que ZC entrât dans quelque échancrure du levier, ou qu'elle y fût attachée de façon que le levier ne pût pas glisser, mais comme nous supposons que cela n'est pas, les deux forces AL, PS feront encore glisser le levier vers L, & l'équilibre cessera.

353. Personne jusqu'ici n'a fait la remarque que nous venons de faire, & cependant il me paroît qu'elle merite attention, si l'on ne veut pas se tromper dans la pratique.

354. La même remarque n'auroit pas lieu, si au lieu d'un sou-

tien en C (*Fig.* 165.), on fuppofoit qu'une puiffance M tirât le point C avec une corde & une direction MC paralelle & contraire aux directions AE, PH des puiffances A & P, car en ce cas fi la puiffance M étoit égale aux deux A & P, & que les deux A & P fuffent entr'elles réciproquement comme PC eft à AC, l'équilibre fubfifteroit entre les trois puiffances. Ce que je prouve ainfi.

Je fais AE. PH :: PC. AC, & CM = AE + PH; je mene des points E, H, M des droites ER, HQ, MX paralelles au levier & des points A, P, C des droites AR, PQ, CR perpendiculaires au même levier, puis achevant les paralellogrammes ALER, PSHQ, CNMX, la puiffance A eft compofée de la force AR tirant avec une corde de A en R, & de la force AL tirant avec une corde de A en L, la puiffance P eft compofée de la force PQ tirant avec une corde de P en Q, & de la force PS tirant avec une corde de P en S; enfin la puiffance M eft compofée de la force CX tirant avec une corde de C en X, & de la force CN tirant avec une corde de C en N; or, les triangles rectangles AER, PHQ, MCN étant femblables, & l'hypothenufe MC du triangle MCN étant égale à la fomme des hypothenufes AE, PH des deux autres, le côté MN ou CX du même triangle MCN fera égal à la fomme des côtés homologues AR, PQ des deux autres triangles; ainfi CX tirant de C en X fera en équilibre avec les deux AR, PQ qui tirent avec des directions contraires, & de même le côté CN du triangle CMN fera égal à la fomme des deux autres côtés homologues ER ou AL, HQ ou PS des deux autres triangles; c'eft pourquoi la force CN tirant de C en N, fera auffi en équilibre avec les deux forces AL, PS qui lui font contraires, & par conféquent l'équilibre fubfiftera entre les trois puiffances.

La différence donc qui fe trouve entre ce cas & le précédent, c'eft qu'ici la force MC tirant avec une corde fait le même effet que les deux CX, CN qui tireroient avec des cordes, au lieu que dans le cas précédent (*Fig.* 164.) la force refiftante XC compofée de XZ, XT ne refifte que comme XZ, tandis que la force XT n'agit point fur le levier, à caufe qu'il n'y a rien qui attache cette force au levier.

355. Si les deux puiffances A & P (*Fig.* 166.) tirent l'une & l'autre avec des cordes & des directions qui ne foient pas paralelles, je prolonge ces directions jufqu'à ce qu'elles fe coupent en un

un point C, & ſuppoſant que ces puiſſances ſoient exprimées par CA, CR, j'acheve le paralellogramme AHRC, & menant la diagonale CH qui coupe le levier AP en O; je dis que ſi une puiſſance exprimée par CH tire le levier avec une corde attachée en O, & avec la direction OH, cette puiſſance ſera en équilibre avec les deux autres A & P. Ce que je prouve ainſi :

Du point C, je mene XM paralelle au levier, & CT perpendiculaire ſur XM, puis achevant autour de AC le paralellogramme rectangle CXAT, la puiſſance A tirant avec une corde de A en C fait le même effet que la force AX qui tireroit avec une corde de A en X jointe à la force AT qui tireroit avec une corde de A en T.

De même du point R, j'abaiſſe RM perpendiculaire ſur XM; & achevant le paralellogramme rectangle RVCM autour de CR, la force tirant de R en C fait le même effet que les forces qui tirent de R en M, & de R en V, c'eſt-à-dire qu'en menant PZ paralelle à RM, la puiſſance qui tire de P en C avec une corde fait le même effet que la force qui tireroit avec une corde de P en Z, & qui ſeroit exprimée par RM jointe à la force qui tireroit avec une corde de P en O, & qui ſeroit exprimée par RV ou CM.

Enfin, du point H, j'abaiſſe HN perpendiculaire ſur XM, & achevant le paralellogramme rectangle CNHE autour de CH, la force CH eſt compoſée de la force CE, & de la force CN, c'eſt-à-dire qu'en menant OY paralelle à CE, la puiſſance qui tireroit avec une corde de O en H, & qui ſeroit exprimée par CH feroit le même effet que la force, qui avec une corde tireroit de O en Y, & qui ſeroit exprimée par CE ou HN jointe à la force qui avec une corde tireroit de O en L & qui ſeroit exprimée par CN.

Or, à cauſe des triangles rectangles AHL, CRM ſemblables & égaux, nous avons $RM = HL$, & à cauſe des paralelles, nous avons auſſi $AX = LN$, donc $RM + AX = HL + LN = HN$; c'eſt-à-dire les deux forces AX, RM ſont enſemble égales à la force HN, & à cauſe que les deux premieres AX, RM ſont contraires à HN; il s'enſuit qu'il y a équilibre entre ces trois forces.

Maintenant les triangles rectangles ſemblables & égaux ACT, HSR donnent $AT = SR$, & par conſéquent la force RV contraire à la force AT détruit cette force par ſa partie RS, & il lui reſte la partie SV, laquelle eſt en équilibre avec la force CN qui

lui eſt égale & contraire. Ainſi puiſque toutes les forces qui compoſent les puiſſances AC, CR, CH ſont en équilibre, il s'enſuit que ces trois puiſſances le ſont auſſi.

Ce feroit la même choſe, ſi au lieu de la puiſſance qui tire de O en H, on mettoit un point d'appui en O, enſorte que le levier y fût attaché fixement ſans pouvoir gliſſer de O en A ou de O en P.

Mais ſi le levier étoit ſimplement appuyé ſur le point O, alors quand même ce point d'appui reſiſteroit ſelon la direction CH de la puiſſance CH, ſa reſiſtance compoſée de la force CE, & de la force CN agiroit ſelon la force FO égale & paralelle à CE, & nullement ſelon la force CN qui n'auroit aucune priſe ſur le levier, & par conſéquent la force RV plus grande que ſon oppoſée AT feroit gliſſer le levier vers A, & il n'y auroit point d'équilibre.

356. Lorſqu'on ſe ſert du levier pour ſoulever un corps B (*Fig.* 167.) qui eſt par terre ſans l'enlever entiérement, alors le levier eſt incliné à l'horizon, la puiſſance A, c'eſt-à-dire les mains qu'on appuye en A tirent avec une direction perpendiculaire AT, & le corps B peſant ſur le levier avec la direction RB perpendiculaire à l'horizon, fait le même effet ſur le levier que la force RS ou HB qui eſt perpendiculaire, car l'autre force compoſante RH n'eſt pas ſupportée par le levier, mais par le terrein. C'eſt pourquoi plus l'angle CBT d'inclinaiſon du levier avec l'horizon devient grand ſans cependant devenir droit, plus le poids que la même puiſſance peut ſoutenir devient grand; car à meſure que cet angle augmente, le côté RS du paralellogramme RSBH devient moindre; ainſi ſuppoſé que ſous un angle égal à l'angle ABT la puiſſance A ſoit en équilibre avec la force RS, la même puiſſance ſous un angle plus grand ſera plus forte que la force RS du paralellogramme RSBC correſpondant à cet angle, & par conſéquent il faudroit augmenter le poids B afin que l'équilibre ſubſiſtât.

357. *Dans le levier recourbé, ſi la puiſſance* A *& le poids* P (Fig. 168.) *ſont perpendiculaires ſur leur bras de levier, & qu'il y ait équilibre, la puiſſance* A *eſt au poids* P *réciproquement comme le bras* CP *eſt au bras* AC.

La puiſſance A ne peut pas décrire l'arc AE, à moins que le poids P ne décrive l'arc PH; or, l'angle ACP étant égal à l'angle ECH, à cauſe de l'infléxibilité du levier, ſi de ces deux angles

on retranche l'angle commun ACH, l'angle restant ECA sera égal à l'angle restant HCP ; & le secteur ECA sera semblable au secteur HCP, donc EA. HP :: AC. CP ; or, les arcs EA, HP, étant parcourus dans des tems égaux, sont entr'eux comme les vitesses de A & P ; donc ces vitesses sont aussi entr'elles comme AC, CP, & par conséquent les forces A & P seront entr'elles comme A × AC, P × PC ; mais à cause de l'équilibre ces forces sont égales, donc A × AC = P × PC, & partant A. P :: PC. AC.

358. Si la puissance ou le poids P ou les deux ensemble sont obliques au levier recourbé, on trouvera leurs rapports en cette sorte.

Supposons que la puissance A (*Fig.* 169.) tire selon la direction AX, & le poids P selon la direction PT, & que le point d'appui soit attaché fixement au levier, ensorte qu'il puisse tourner autour de ce point sans glisser. J'éleve en A & P les droites AM, PQ perpendiculaires aux bras AC, CP, & je fais AM. PQ :: PC. CA, du point M je mene MX paralelle à AC & qui coupe la direction AX en X, & j'acheve le rectangle AMXZ; de même du point Q, je mene QT paralelle à PC, & achevant le paralellogramme rectangle PQTV, je dis que A est à P, comme la diagone AX est à la diagonale PT; car la force AX composée de AM qui tire de A en M & de AZ qui tire de A en Z, ne peut faire mouvoir le levier que selon AM, à cause que la résistance du point fixe C est en équilibre avec AZ, de même la force PT composée de PQ qui tire de P en Q & de PV qui tire de P en V, ne peut faire mouvoir le levier que selon PQ, à cause que la resistance du point C est en équilibre avec PV ; or, les forces MA, PQ sont en équilibre, puisqu'elles sont entr'elles réciproquement comme leurs bras de levier ; donc les forces AX, PT sont aussi en équilibre, & ainsi des autres.

359. **Probleme.** *Connoissant la pesanteur du levier* AB (Fig. 170.) *le point* C *autour duquel la puissance & le poids seroient en équilibre avec des directions perpendiculaires au levier, si le levier ne pesoit point, connoître le point* H *autour duquel il doit y avoir équilibre en ayant égard à la pesanteur du levier.*

Le levier AB étant supposé de même grosseur par-tout, & composé de parties homogenes, son centre de gravité est sur le point du milieu M, ainsi nous pouvons considérer ce levier pesant AB comme un poids attaché au point M d'un levier AB qui n'auroit point de pesanteur, & de même nous pouvons con-

ſidérer la puiſſance A & le poids B comme ne faiſant enſemble qu'un ſeul poids mis au point C qui eſt leur centre d'équilibre. C'eſt pourquoi coupant la diſtance MC en deux parties CH, HM réciproques à la peſanteur du levier miſe en M, & au poids A équivalant à la puiſſance A & au poids B; le point H ſera le centre d'équilibre cherché.

360. De-là il eſt aiſé de voir que ſi le centre de gravité M du levier eſt du côté de la puiſſance A par rapport au point d'appui C, cette puiſſance eſt aidée par la peſanteur du levier, & doit enlever le poids, & ſi au contraire le centre de gravité M du levier eſt du côté du poids, le poids entraînera la puiſſance, & dans l'un & l'autre cas la peſanteur du levier que l'on négligeroit empêcheroit qu'il n'y ait équilibre.

361. PROBLEME. *Connoiſſant la peſanteur d'un levier* AB (Fig. 170.) *les diſtances* AC, CB *du centre* C *de mouvement aux extrêmités* A, B *du levier, & le poids* B *attaché à l'extrêmité* B, *connoître la puiſſance* A *qu'il faut appliquer à l'autre extrêmité pour faire équilibre en ayant égard à la peſanteur du levier.* *

Je nomme P la peſanteur du levier, & ſuppoſant que le centre de gravité M du levier ſoit ſur le bras CA; je cherche la partie du poids B qui pourroit être en équilibre autour de C avec la peſanteur P réunie au point M, en faiſant CB. MC :: P. $\frac{MC \times P}{CB}$, ainſi $\frac{MC \times P}{CB}$ eſt la partie du poids qui ſeroit en équilibre avec la peſanteur, & par conſéquent la puiſſance miſe en A doit être en équilibre avec le reſte du poids B, lequel reſte eſt B $-\frac{MC \times P}{CB}$, ou $\frac{CB \times B - MC \times P}{CB}$; c'eſt pourquoi je fais CA. CB :: $\frac{CB \times B - MC \times P}{CB}$. $\frac{CB \times B - MC \times P}{CA}$, & ce quatriéme terme exprime la puiſſance ou le poids qu'il faudroit mettre en A pour faire équilibre avec B autour du point C.

Soit AB = 20, AC = 12, BC = 8, B = 60 livres, & la peſanteur P = 5 livres; donc AM = 10, & MC = 2, ainſi dans la premiere proportion ci-deſſus, nous aurons 8. 2 :: 5. $\frac{10}{8}$, c'eſt-à-dire la peſanteur du levier ſera en équilibre avec les $\frac{10}{8}$ ou les $\frac{5}{4}$ d'une livre; ainſi le poids B peſant 60 livres, la puiſſance A ou le poids qu'il faudroit mettre en A ne doit plus ſoutenir que 60

livres — $\frac{5}{4}$, c'est-à-dire $58\frac{3}{4}$; nous aurons donc dans la seconde proportion ci-dessus $12 . 8 :: 58\frac{3}{4} . \frac{8 \times 58\frac{3}{4}}{12}$, & ce dernier terme $\frac{8 \times 58\frac{3}{4}}{12} = \frac{2 \times 58\frac{3}{4}}{3} = \frac{117\frac{1}{2}}{3} = \frac{235}{6} = 39\frac{1}{6}$ fait voir qu'une puissance équivalente à 39 livres $\frac{1}{6}$ seroit en équilibre avec le poids B.

Si le centre de gravité M du levier est du côté B (*Fig.* 171.) supposons $AB = 20$, $AC = 8$, $BC = 12$, le poids $B = 60$, & la pesanteur du levier $= 5$; le moment ou la force du poids B par rapport au centre du mouvement sera $B \times CB = 60 \times 12 = 720$, le moment de la pesanteur P sera $P \times MC = 5 \times 2 = 10$; donc les deux momens pris ensemble sont 730, & ces deux momens doivent être égaux au moment de la puissance A, lequel est $A \times AC = A \times 8$; donc $730 = A \times 8$, & $\frac{730}{8} = A$, ou $91\frac{1}{4} = A$, c'est-à-dire que la force A devroit être équivalente à un poids de 91 livres $\frac{1}{4}$ pour être en équilibre avec B & la pesanteur P.

362. Si la puissance ou le poids ou tous les deux avoient des directions qui ne fussent pas perpendiculaires au levier, on trouveroit encore aisément les mêmes choses que ci-dessus.

Supposons, par exemple, qu'une puissance A (*Fig.* 172.) tire selon une direction AF, & que cette puissance soit exprimée par la droite AF; du point F, je mene FT paralelle au levier, & du point A, je mene AT perpendiculaire au même levier, & achevant le paralellogramme ATFL, la puissance AF est composée de la force AT qui tire de A en T, & de la force AL qui tirant de A en L est en équilibre avec la resistance du point fixe C, autour duquel le levier tourne; c'est pourquoi la puissance AF fait le même effet par rapport au poids qu'il faut mettre en B que la puissance CT qui seroit perpendiculaire au levier. Or, dans le triangle rectangle AFT dont la base AF est connue, & dont l'angle AFT ou FAL est connu, on peut connoître aisément le côté AT; ainsi si l'on veut connoître le poids qu'il faut mettre en B, afin que la puissance AT, & le poids soient équilibre en ayant égard à la pesanteur du levier, on fera comme il a été dit ci-dessus.

363. Tout ce qui a été dit dans les articles précédens par rapport au levier de la premiere espece, peut s'appliquer à celui de la seconde espece.

364. Quant au levier recourbé dont les deux bras sont dans un

plan perpendiculaire à l'horizon, ſuppoſons que l'un des bras CB (*Fig.* 173.) ſoit horizontal, que la puiſſance A ſoit perpendiculaire en A, & qu'on veuille connoître le poids qu'il faut mettre en B pour faire équilibre en ayant égard à la peſanteur du levier. Du milieu M du bras CA, je mene la droite MN au milieu N de l'autre bras CB; je coupe CB en deux parties MR, RN réciproques aux deux bras, c'eſt-à-dire je fais AC. CB :: NR. RM, & le point R eſt le centre de gravité du levier. Abaiſſant donc du point R la verticale RS qui coupe le bras CB en S, la peſanteur du levier peut être conſiderée comme un poids attaché au point S, c'eſt pourquoi on cherchera comme ci-deſſus la partie de la puiſſance A avec laquelle la peſanteur du levier peut être en équilibre autour du point C, & enſuite le poids B convenable pour être en équilibre avec le reſte de la puiſſance A, & de même des autres cas.

365. PROBLEME. *Conſtruire une Balance Romaine.*

On prend un long levier AE, (*Fig.* 174.) de bois ou de fer, qui ſoit d'égale épaiſſeur partout; ſur ce levier, on prend pour centre de mouvement un point C à une petite diſtance de l'une des extrêmités A; au-deſſus du point C, on met perpendiculairement une languette ou lame de fer qui paſſe dans le fleau CD attaché fixement au centre C de mouvement; à l'extrêmité A, on attache un crochet duquel pend un baſſin ou une planche attachée au crochet avec quatre cordes, de façon que le crochet & la planche ou le baſſin ſoient en équilibre avec l'autre bras CE du levier, ce que l'on connoît en ſuſpendant toute la machine par le fleau; car ſi la languette ne ſort ni d'un côté ni d'autre hors du fleau, & que le mouvement ceſſe, il y a équilibre. Enfin on prend la diſtance AC, & la portant ſur le bras CE de C en 1. de 1. en 2. & ainſi de ſuite, la balance eſt conſtruite.

Pour ſe ſervir de cette Balance, on met dans le baſſin la marchandiſe que l'on veut peſer, & l'on prend un poids d'une livre qu'on fait gliſſer le long du bras CE juſqu'à ce que la marchandiſe & le poids ſe contrebalancent. Si lorſque l'équilibre ſe trouve, le poids P eſt ſur le point 1. du bras CE, la marchandiſe peſe une livre, c'eſt-à-dire autant que le poids à cauſe des diſtances égales AC. C1. Si le poids P eſt ſur le point 2. la marchandiſe peſera deux livres, puiſqu'elle ſera au poids P réciproquement comme la diſtance C2. du poids au centre de mouvement eſt à la diſtance AE du même centre à la marchandiſe, & ainſi des autres.

Lorſque la marchandiſe qu'on veut peſer eſt d'une peſanteur conſidérable, on met au lieu du poids P d'une livre, un autre poids plus conſidérable, par exemple, de 100 livres, & alors ſi l'équilibre ſe trouve au point 1. la marchandiſe peſe 100 livres, s'il ſe trouve au point 2. la marchandiſe peſe 200 livres, & ainſi de ſuite.

366. Comme il n'eſt guéres poſſible de trouver des leviers qui ſoient parfaitement homogenes dans toutes leurs parties, on trouvera les diviſions 1. 2. 3. &c. du bras CE beaucoup plus juſtes, en mettant ſucceſſivement dans le baſſin un poids d'une livre, un de deux, un de trois, &c. & cherchant pour chacun d'eux le point où il faut mettre le poids P pour faire équilibre, ce que l'on trouve en faiſant gliſſer ce poids le long de CE juſqu'à ce qu'on ait l'équilibre demandé.

C'eſt ainſi que les Ouvriers conſtruiſent les Balances Romaines; mais comme ils peuvent fort bien y commettre des inexactitudes, je crois qu'il vaut mieux ſe ſervir de la Balance ordinaire dont nous allons parler.

367. PROPOSITION LIX. *Si le centre* C *de mouvement*(Fig. 175.) *eſt ſur le milieu d'un levier* AB, *& qu'aux extrêmités* A, B, *on attache deux poids égaux* P, Q *qui par conſéquent ſeront en équilibre, je dis qu'en quelque poſition qu'on mette le levier, ſoit horizontalement ou obliquement, l'équilibre ſubſiſtera toujours, & le levier reſtera en repos.*

Cette Propoſition eſt évidente, lorſque le levier eſt dans la poſition horizontale AB à cauſe de l'égalité des poids & des bras AC, CB, & elle n'eſt guéres moins claire lorſque le levier eſt dans la poſition oblique FH; car ſi l'on ſuppoſe que le poids *p* ſoit exprimé par la droite F*p* qui tire de F en *p*, & faiſant autour de F*p* le paralellogramme rectangle FV*p*T, le poids *p* fera le même effet qu'un poids exprimé par FT & qui tireroit ſelon la direction TF joint à un autre poids exprimé par FV & qui tireroit ſelon la direction FV. Par la même raiſon, le poids *q* fait le même effet qu'un poids qui ſeroit exprimé par HM, & qui tireroit ſelon la direction HM joint à un autre poids exprimé par HN, & qui tireroit ſelon la direction HN. Or les diagonales F*p*, H*q* étant égales puiſqu'elles expriment des poids égaux, & l'angle *p*FV égal à l'angle *q*HN, les triangles rectangles FV*p*, HN*q* ſont égaux; donc V*p* ou FT = N*q* ou HM; ainſi à cauſe de l'égalité des bras FC, CH, les poids égaux FT, HM ſont en équilibre,

& les poids ou forces FV, HN étant retenues par la résistance du point fixe sont aussi en équilibre avec cette résistance, & par conséquent le levier doit rester en repos.

368. PROPOSITION LX. *Mais si le centre de mouvement* C, (Fig. 176.) *est au-dessus du milieu* H *du levier* AC, *& qu'après avoir attaché aux deux extrémités* A, B *deux poids égaux* P, Q *on mette le levier dans une situation oblique* EF, *je dis que ce levier se mouvra jusqu'à ce qu'il se soit remis dans la position horizontale* AB *où les deux corps se trouveront en équilibre.*

Afin que le levier puisse être mis dans la position oblique EF, il faut nécessairement que son centre de gravité monte en décrivant l'arc HR; or ce centre étant en R, n'est plus soutenu selon sa direction verticale; ainsi il doit descendre jusqu'à ce qu'il se retrouve directement sous le point fixe C qui l'empêchera de descendre plus bas, & alors l'égalité des poids & des deux bras établit l'équilibre.

369. PROPOSITION LXI. *Enfin si le centre* C *du mouvement*, (Fig. 177.) *est en-dessous du milieu* M *du levier* AC, *& qu'après avoir mis deux poids égaux aux extrêmités* A, B, *du levier, on le mette dans une position oblique* EF, *je dis que le levier ne cessera de descendre jusqu'à ce qu'il soit parvenu à la position horizontale* HS *paralelle à la position* AB.

Le levier ne peut être mis dans la position EF, à moins que son centre de gravité M ne décrive l'arc MR; or ce centre étant en R ne trouve rien qui le soutienne selon sa direction verticale. Donc il doit descendre jusqu'à ce qu'il se trouve directement sous le point d'appui C qui l'empêchera de descendre plus bas, & alors il y aura équilibre entre les deux poids.

370. La Balance ordinaire, (*Fig.* 178.) n'est autre chose qu'un levier A, B, dont le centre de mouvement est un peu au-dessus du point M du milieu. On y attache aux deux extrêmités deux bassins égaux C, E qui soient en équilibre; après quoi, quand on veut peser quelque marchandise, on la met dans l'un des bassins C, & l'on met dans l'autre des poids connus, tels qu'ils soient en équilibre avec la marchandise; ainsi, si le poids qui fait équilibre est de deux livres, la marchandise pese deux livres, &c.

371. La Balance ordinaire est trompeuse, quand l'un des bras est plus long que l'autre, & alors le bassin qui est à l'extrêmité de ce long bras ne pese pas autant que l'autre; car autrement ces deux bassins ne feroient pas en équilibre, & l'on pourroit par ce moyen

moyen connoître aisément la friponnerie. Ceux qui se servent de ces sortes de Balance, mettent toujours la marchandise qu'ils vendent du côté du plus long bras, afin qu'elle fasse équilibre avec un poids plus grand qu'elle, & au contraire s'ils achetent, ils mettent la marchandise du côté du moindre bras afin qu'elle fasse équilibre avec un poids moindre; & par cette ruse ils vous trompent toujours, soit qu'ils vendent, ou qu'ils achetent de vous.

372. Pour n'être pas la dupe de ces sortes de gens, il faut après avoir mis la marchandise dans l'un des bassins, & trouvé le poids qui lui fait équilibre dans l'autre, transporter la marchandise dans le bassin du poids, & le poids dans celui de la marchandise; & si la Balance est fausse, l'équilibre ne subsistera plus.

373. Pour connoître le véritable poids d'une marchandise qui a été pesée dans une Balance trompeuse, je mets dans le bassin C, (*Fig.* 179.) la marchandise que je nomme m, & dans le bassin E un poids p qui fasse équilibre avec la marchandise; je transporte dans le bassin E la marchandise, & je mets dans le bassin C un autre poids q qui soit en équilibre avec elle; je multiplie le poids p par le poids q, & tirant la racine quarrée du produit pq, cette racine est le véritable poids de la marchandise. Car quand cette marchandise est en C, nous avons BM. AM :: $m.\ p$; & quand elle est en E :: nous avons BM. AM :: $q.\ m$; donc $q.\ m :: m.\ p$, & $pq = mm$, & $m = \sqrt{qp}$.

Soit $p = 9$, $q = 10$; donc $qp = 90$ & $\sqrt{pq} = \sqrt{90} = 9\frac{48}{100} = 9\frac{12}{25}$; ainsi la marchandise étant mise en C, pese $9\frac{12}{25}$, au lieu de 9 livres, & par conséquent celui qui a acheté cette marchandise a gagné $\frac{12}{25}$ d'une livre sur son achat, supposé qu'il ait mis la marchandise dans le bassin C; mais s'il avoit voulu vous tromper en vous vendant la même marchandise, il l'auroit mise dans le bassin E, & alors elle auroit fair équilibre avec $q = 10$, & par conséquent il auroit gagné sur le poids $\frac{10}{25}$, puisque la marchandise n'auroit pesé réellement que $9\frac{12}{25}$, au lieu de 10.

De-là il est aisé de connoître le rapport des deux bras AM, MB; car puisque la marchandise $9\frac{12}{25}$ étant en C, se trouve en équilibre avec $p = 9$, nous avons MB. AM :: $9\frac{12}{25}\ 9$.

De la Rouë dans son Aissieu.

374. La *Roue dans son Aissieu* est une Roue dont les rayons

sont attachés fixement à un cylindre nommé aissieu ou treuil aux deux extrêmités duquel sont deux pieces de fer qui s'enchassent dans deux pivots ou soutiens sur lesquels le cylindre & la roue tournent ensemble, la Figure 180 représente cette Machine. Le poids qu'on veut enlever est attaché au treuil avec une corde, & la puissance est attachée à la circonférence de la Roue.

375. PROPOSITION LXII. *Si une puissance* A, (Fig. 181.) *qui tire avec une direction* AH *tangente à la Rouë, tient en équilibre un poids* D, *la puissance est au poids comme le rayon* CE *de l'Aissieu est au rayon* AC *de la Rouë.*

Si le rayon AC de la Roue auquel la puissance A est perpendiculaire, est en ligne droite avec le rayon CE du treuil auquel la direction du poids est perpendiculaire, on peut considerer la droite AE comme un levier dont le centre du mouvement est le point C; ainsi dans le cas de l'équilibre entre la puissance & le poids, nous avons A. P :: CE. AC.

Si la puissance tire avec une direction BX perpendiculaire au rayon BC qui n'est pas en ligne droite avec le rayon CE auquel le poids est perpendiculaire, nous regarderons les droites BC, CE comme les bras d'un levier recourbé auquel la puissance & le poids sont perpendiculaires, & par conséquent nous aurons encore A. P :: CE BC.

376. Si la puissance ne tire pas avec une direction tangente à la Roue, il est aisé d'appliquer à cette Machine ce que nous avons dit des leviers auxquels la puissance est oblique.

377. Lorsqu'on veut élever des poids extrêmement grands par le moyen de cette Machine, il faudroit augmenter prodigieusement le rayon de la Roue, ce qui deviendroit trop incommode: c'est pourquoi on se sert alors des Roues dentées, dont nous allons parler.

Des Rouës dentées.

378. Les Roues dentées ne different de la Roue dans son aissieu, qu'en ce que leurs circonferences & celles de leurs aissieux ont des dents. On en met ordinairement plusieurs, comme on voit ici, (*Fig.* 182.) la premiere qui est celle à laquelle la puissance s'attache n'a point de dents à sa circonference, & son aissieu en a, celles qui sont entre la premiere & la derniere ont des dents à leurs circonferences & à celles de leurs aissieux, & la derniere qui est celle à l'aissieu de laquelle le poids est attaché,

n'a point de dents à son aissieu. Tandis que la premiere Roue tourne de B vers A, les dents de son aissieu C font tourner la seconde de F vers E, & les dents de l'aissieu G de cette seconde font tourner la troisiéme de L vers I; ainsi si celle-ci est la derniere, la corde du poids P attaché à l'aissieu O s'entortille autour de cet aissieu, & le poids monte.

379. PROPOSITION LXIII. *Si une puissance* A *perpendiculaire au rayon* AC *de la premiere Roue est en équilibre avec le poids* P *attaché à l'aissieu de la derniere, la puissance & le poids sont en raison composée des raisons des rayons des aissieux aux rayons des Roues, c'est-à-dire la puissance est au poids comme le produit des rayons des aissieux multipliés les uns par les autres est produit des rayons des Roues.*

Supposons d'abord qu'il n'y ait que la Roue à laquelle le poids est suspendu, la puissance qui tireroit de L en X perpendiculairement au rayon LO de la Roue, & qui tiendroit le poids en équilibre, seroit à ce poids comme le rayon OR de l'aissieu est au rayen LO de la Roue; car les deux rayons OR, LO forment un levier recourbé dont le centre de mouvement est le point O. Ainsi nous aurions LO. OR :: P. $\frac{P \times OR}{LO}$, & ce quatriéme terme seroit l'expression de la puissance mise en L.

Supposons maintenant qu'il y ait une seconde Roue, & qu'une puissance tirant de F en Z perpendiculairement au rayon FG de cette Roue soit en équilibre avec le poids, il est clair que les dents de l'aissieu G de cette Roue doivent faire le même effet sur la Roue qui soutient le poids, que feroit la puissance $\frac{P \times OR}{LO}$. Ainsi la puissance mise en F étant en équilibre avec le poids P seroit aussi en équilibre avec la puissance $\frac{P \times OR}{LO}$ qui seroit en L, & par conséquent à cause du levier FL dont le centre de mouvement est le point G, nous aurions FG. LG :: $\frac{P \times OR}{LO}$. $\frac{P \times OR \times LG}{LO \times FG}$, & ce quatriéme terme exprimeroit la puissance mise en F qui seroit en équilibre avec le poids.

Mettant de même une troisiéme Roue & une puissance qui tire de A en V perpendiculairement au rayon AC & qui soit en équilibre, nous prouverons aussi que cette puissance seroit en équilibre avec la puissance $\frac{P \times OR \times LG}{LO \times FG}$ qui seroit en F; c'est pour-

quoi à cauſe du levier AF dont le centre de mouvement eſt en C, nous aurons AC. CF :: $\frac{P \times OR \times LG}{LO \times FG}$. $\frac{P \times OR \times LG \times CF}{LO \times FG \times AC}$, & ce quatriéme terme ſera l'expreſſion de la puiſſance miſe en A. Ainſi la puiſſance miſe en A eſt au poids P comme $\frac{P \times OR \times LG \times CF}{LO \times FG \times AC}$ eſt à P, ou comme $P \times OR \times LG \times CF$ eſt à $P \times LO \times FG \times AC$, ou enfin comme $OR \times LG \times CF$ eſt à $LO \times FG \times AC$, c'eſt-à-dire comme le produit des rayons OR, LG, CF des aiſſieux eſt au produit des rayons LO, FG, AC des rayons des Roues.

Des Poulies.

380. Proposition LXIV. *Si une puiſſance* A *& un poids* P, (Fig. 183.) *ſont en équilibre autour d'une Poulie, la puiſſance & le poids ſont égaux.*

Si les directions BA, CP ſont paralelles, elles toucheront la circonference de la poulie aux extrêmités B, C du diamétre BC; or le point fixe de la poulie étant le centre D, la puiſſance & le poids ſont le même effet que ſi on les avoit attachés aux extrêmités B, C du levier BC, & par conſéquent le moment ou force de la puiſſance A eſt $A \times BD$, & le moment du poids eſt $P \times CD$; mais par la ſuppoſition $A \times BD = P \times CD$, puiſque la puiſſance & le poids ſont en équilibre; donc A. P :: CD. BD; & partant $A = P$ à cauſe de $CD = BD$.

Si la puiſſance tire avec la direction EF tangente de la poulie, mais non paralelle à la direction CP du poids, je mene du point E la droite ED au centre de la poulie, & j'ai un levier recourbé EDC dont les bras ED, DC ſont égaux; ainſi le moment de A eſt $A \times ED$, & le moment du poids eſt $P \times DC$; or par la ſuppoſition nous avons $A \times ED = P \times DC$; donc A. P :: DC. EC; & partant $A = P$.

381. La poulie ne fait donc rien gagner du côté de la puiſſance; mais l'avantage qu'on en tire, c'eſt qu'on peut changer la direction de la puiſſance & la rendre plus commode. Par exemple, pour ſoutenir le poids P ſans la poulie, il faudroit que la puiſſance tirât ce poids avec la direction CR oppoſée à la direction CP du poids, au lieu que par le moyen de la poulie, elle peut le ſoutenir avec la direction BA qui eſt beaucoup moins fatiguante, & ainſi des autres.

382. PROPOSITION LXV. *Si un poids* P, (Fig. 184.) *suspendu au centre* E *d'une poulie est en équilibre avec une puissance* A *qui tire avec une direction* AB *tangente à la poulie par le moyen d'une corde* ABVCR *attachée fixement au point* R, *la puissance est au poids comme* 1 *est à* 2.

Supposons que le diamétre BC de la poulie soit dans la position HI, & que par conséquent le centre E soit en V, ce centre ne pourra monter de V en E, à moins que le poids & la puissance ne parcourent chacun un espace égal à VE; or quand le centre sera parvenu en E, la corde RI se sera abregée de la quantité CI = VE, laquelle aura passé du côté de la puissance; donc cette puissance aura parcouru un autre espace égal à VE, & par conséquent elle aura parcouru 2VE, tandis que le poids n'aura parcouru que VE; mais les espaces 2VE & VE parcourus dans le même tems par la puissance & le poids marquent leurs vitesses, & par la supposition les momens de la puissance & du poids sont égaux, puisqu'il y a équilibre; donc $A \times 2VE = P \times VE$; & partant A. P :: VE. 2VE :: 1. 2.

383. On peut faire qu'une même puissance soit à un même poids comme 1 à 1, comme 1 à 2, comme 1 à 4, comme 1 à 8, & ainsi de suite selon la progression 1. 2. 4. 8. 16, &c. en disposant les poulies O. E. C, &c. (*Fig.* 185.) de façon que leurs cordes soient attachées aux points fixes H, M, N, & que la corde HRSZA passe sur une poulie B, afin que la puissance tire selon la direction FA.

Car s'il n'y avoit que la poulie B, & que la puissance A soutînt le poids attaché en S, la puissance & le poids seroient en équilibre, & par conséquent on auroit A. P :: 1. 1. Mais si le poids est suspendu au centre O de la poulie O, alors à cause du levier SR dont les bras SO, OR sont égaux, la puissance & le point fixe H ne soutiendroient chacun que la moitié du poids; & partant on auroit A. P :: 1. 2. De même, si le poids étoit suspendu au centre E de la poulie E, la corde MT & la corde OX soutiendroient chacune la moitié du poids; or cette moitié étant soutenue par le point fixe H & par la puissance A, la puissance n'en soutiendroit que la moitié, c'est-à-dire le quart du poids, & par conséquent on auroit A. P :: 1. 4. que si on suspendoit le poids au centre C de la poulie C, la corde NV soutiendroit la moitié, & la corde EL soutiendroit l'autre moitié. Or cette moitié étant soutenue par les cordes MT, OX., il est clair que OX n'en sou-

tiendroit encore que la moitié, c'est-à-dire le quart du poids, & que ce quart étant soutenu par le point fixe H & par la puissance A, celle-ci ne soutiendroit que la moitié de ce quart, c'est-à-dire le huitiéme du poids; & partant, on auroit A. P :: 1. 8, & ainsi de suite.

384. Soient plusieurs poulies A, B, C, D, (*Fig.* 186.) mises en ligne droite horizontale & à égale distance les unes des autres; soient aussi un même nombre de poulies mobiles M, N, X, Z, disposées de façon qu'une corde attachée à un point fixe T passe successivement sous les poulies mobiles, & sur les fixes jusqu'à ce qu'ayant passé sur la premiere fixe A une puissance H qui tire cette corde tienne en équilibre des poids égaux P, Q, R, S attachés aux centres M, N, X, Z des poulies mobiles. Je dis que cette puissance sera égale à la moitié de l'un de ces poids, ce que je prouve ainsi.

Si la corde *ab* étoit retenue par un point fixe *b*, la puissance H soutiendroit la moitié du poids P, & le point *b* soutiendroit l'autre moitié; de même si les cordes *dc*, *fm* de la poulie N étoient soutenues par des points fixes *c*, *m*, ces points soutiendroient chacun la moitié du poids Q, & ainsi des autres; or la moitié du poids P & la moitié du poids Q sont en équilibre autour de la poulie B; donc cette poulie fait le même effet que les deux points fixes *b*, *c*, & par conséquent elle doit soutenir la moitié du poids P & la moitié de Q. On prouvera de la même façon que la poulie C soutient la moitié du poids Q & la moitié du poids R, que la poulie D soutient la moitié du poids R & la moitié du poids S, & qu'enfin le point fixe T soutient l'autre moitié du poids S; donc, puisque la puissance H ne soutient que la moitié de P, nous avons $H = \frac{1}{2}P$.

385. Maintenant, si nous supposons que les poulies mobiles soient attachées fixement à une chape ou piece de bois FL, (*Fig.* 187.) & qu'au lieu des quatre poids égaux attachés aux centres des poulies mobiles on suspende du milieu O de la chape un poids Y égal à la somme des quatre, je dis que la puissance H qui tient ce poids en équilibre est au poids, comme l'unité est au double du nombre des poulies mobiles, ou comme l'unité est au nombre des brins de corde que le poids tire. Car le poids Y étant attaché au centre de gravité de la chape FL des poulies mobiles fait le même effet que les quatre poids égaux qui étoient attachés à égale distance de part & d'autre de ce centre; or dans

la supposition des quatre poids à chaque poulie mobile, nous avons trouvé que la puissance étoit égale à la moitié de l'un des quatre poids; donc la puissance étoit aux quatre poids comme 1 est à 8, c'est-à-dire comme 1 est au nombre 8 double du nombre des poulies mobiles, ou comme l'unité est au nombre 8 des brins de corde que les poulies poulies mobiles tiroient. Ainsi puisque le poids Y est égal aux quatre poids & qu'il fait le même effet, nous avons A. Y :: 1. 8.

386. Lorsqu'on attache fixement plusieurs poulies à une même chape, cette Machine s'appelle *Mousle*.

387. Soit deux ou plusieurs poulies A, B, (*Fig.* 188.) attachées fixement à une chape TR & autant d'autres poulies C, D attachées fixement à une autre chape VL ayant à son extrêmité V un poids P suspendu, & qu'une corde attachée au crochet R de la chape TR passe alternativement sous les poulies d'en-bas D, C, & sur les poulies d'en-haut B, A, de sorte qu'une puissance H tienne en équilibre le poids P, je dis que cette puissance est au poids comme l'unité est au double du nombre des poulies D, C d'en-bas, ou comme l'unité est au nombre des brins de corde que le poids tire.

Car supposons que le centre *c* de la poulie C soit en V, & que par conséquent son diamétre MN soit en XZ, ce centre *c* ne peut monter de V en C, à moins que la corde qui passe par cette poulie ne se raccourcisse des deux parties égales MX, NZ, & par la disposition de cette Machine, il est visible que les cordes qui passent par la poulie D se seront raccourcies ehacune d'autant quand le centre V sera parvenu en C; ainsi ces quatre parties égales de corde auront passé du côté de la puissance H, & par conséquent cette puissance aura parcouru quatre espaces égaux à CV tandis que le poids P ne se sera élevé que de la hauteur VC. Or les espaces parcourus dans des tems égaux marquent les vitesses; donc le moment de la puissance sera $H \times 4CV$, & celui du poids sera $P \times CV$; mais par la supposition ces momens sont égaux; donc $H \times 4CV = P \times CV$, & partant H. P :: CV. 4CV. 1.4. c'est-à-dire la puissance est au poids comme l'unité est au nombre 4 double du nombre des poulies d'en-bas, ou comme l'unité est à 4, nombre des cordes que le poids tire.

388. Si au lieu de faire passer la corde que la puissance tire par la premiere poulie d'enhaut on la faisoit passer sous la derniere poulie C d'en-bas, (*Fig.* 189.) la puissance H feroit au poids

comme 1 eſt au nombre de toutes les cordes; car tandis que le centre C monteroit de V en C, les cordes qui paſſent par la poulie C ſe racourciroient de deux parties MX, NZ égales à VC, & les cordes qui paſſent par la poulie D ſe raccourciroient chacune d'autant, de même que la corde attachée au crochet L; c'eſt pourquoi il paſſeroit du côté de la puiſſance cinq parties de corde égales chacune à CV, & par conſéquent l'eſpace parcouru par la puiſſance étant à l'eſpace VC dont le poids ſe feroit élevé comme 5 eſt à 1, le moment de la puiſſance feroit H×5CV, & celui du poids P×CV, & à cauſe de l'équilibre nous aurions H×5CV=P×CV; donc H. P :: CV. 5CV. 1. 5, ce qui fait voir que cette diſpoſition eſt plus favorable à la puiſſance que celle de la Figure 188, puiſque nous avons vû que dans celle-là la puiſſance feroit au poids comme 1 à 4.

389. Si on joignoit enſemble la diſpoſition de la Fig. 188 avec la diſpoſition de la Fig. 189, & qu'on n'en fît qu'une ſeule Machine, (*Fig.* 190.) on gagneroit beaucoup davantage du côté de la puiſſance. Car ſi cette puiſſance étoit en S, elle feroit au poids P comme 1 eſt à 5 à cauſe qu'il y a cinq cordes tirées par les deux poulies inférieures C, D, dans la diſpoſition CDBA; ainſi cette puiſſance étant ſoutenue par l'autre diſpoſition RXTV n'agit ſur cette diſpoſition que comme un poids qui feroit la cinquiéme partie du poids P; or la puiſſance H eſt au poids S comme 1 eſt à 4 à cauſe qu'il y a quatre cordes tirées par les deux poulies inférieures R, X; donc la puiſſance H n'eſt que la quatriéme partie de la puiſſance S, & comme celle-ci n'eſt que la cinquiéme partie du poids P, il s'enſuit que la puiſſance H ne feroit que la vingtiéme partie du poids P, car le quart du cinquiéme eſt un vingtiéme. Les deux poulies M, N ſont des poulies fixes qui ne font autre choſe que faciliter l'uſage de la Machine.

390. Si on joint à la diſpoſition de la Figure 188 l'effort d'un levier par le moyen d'une chévre, on gagnera conſidérablement du côté de la puiſſance; la chévre eſt un inſtument compoſé de trois pieds AB, BC, BD, (*Fig.* 193.) qui ſe joignent à un même ſommet B, à ce ſommet ſont attachés des mouſles ſelon la diſpoſition de la Figure 188, la corde qui paſſe par la poulie ſupérieure vient s'entortiller à un treuil MN attaché aux deux pieds BC, BD qui à cauſe de cela font deux petits coudes au-deſſus de M & N; le treuil eſt percé de deux ou pluſieurs trous dans leſquels on paſſe des leviers tels que HR, & c'eſt à l'aide de ces leviers

viers qu'une ou plusieurs puissances font tourner le treuil & enlevent le poids suspendu à la moufle inférieure. Or supposant que la moufle inférieure n'ait que deux poulies, la puissance qui tireroit en H sans le secours du treuil MN seroit au poids comme 1 à 4, ainsi elle feroit le même effet qu'un poids qui ne seroit que le quart de P; mais comme cette puissance est attachée au treuil, & qu'une autre puissance attachée au levier HR en R est en équilibre avec elle, si nous supposons que la longueur HR du levier soit dix fois plus grande que le rayon du treuil, la puissance en R sera à l'autre puissance $\frac{1}{4}$P comme 1 à 10, & par conséquent elle sera $\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{4}$ P, c'est-à-dire $\frac{1}{40}$ P, d'où l'on voit que la puissance en R pourroit tenir en équilibre une force 40 fois plus grande qu'elle, & ainsi des autres.

390. S'il est donc vrai, comme quelques-uns le disent, qu'un homme qui tire par le moyen d'un levier tire comme un poids de 25 livres, cet homme par le moyen d'une chévre pourra tenir en équilibre un poids 40 fois plus grand, c'est-à-dire un poids de 1000 livres.

Du Cric.

391. Le *Cric* est une large barre de fer faite à dents dans lesquelles s'engrainent les dents d'un aissieu CF, (*Fig.* 192.) d'une Roue dentée CE; dans les dents de celle-ci s'engrainent les dents d'un rouet OH, au centre duquel est une manivelle OMNI qui tient lieu d'une Roue dont le rayon seroit MN, & dont l'aissieu seroit le rouet OH.

Pour faire usage de cette Machine, la puissance s'applique sur NI, & par le moyen de la manivelle elle fait tourner le rouet OH de E en H. Ce qui fait tourner la Roue CE de E, en L de même que son aissieu CF, lequel fait monter le Cric AB, & souleve le poids qui est mis en A.

Le calcul de cette Machine est le même que celui des Roues dentées, c'est-à-dire que la puissance est au poids comme le produit des rayons CF, OH des aissieux est au produit des rayons CE, MN des Roues. Supposant donc que le rayon CF soit au rayon CE comme 1 est à 4, & le rayon OH au rayon MN comme 1 est à 5. La puissance sera au poids comme 1 est à 20. On pourroit augmenter considérablement la force du Cric, en y mettant un plus grand nombre de Roues dentées & d'aissieux.

La Figure 191 représente la caisse AC dans laquelle on met

le Cric lorſqu'on s'en ſert, la manivelle ſort hors de la caiſſe, & eſt repréſentée en MRTV.

DE LA VIS.

392. Si l'on conçoit qu'un priſme triangulaire AMBR(*Fig.* 194.) incliné ſur ſa baſe AHR ſoit flexible de façon à pouvoir s'entortiller autour d'un cylindre, le ſolide qui en proviendra ſera ce qu'on appelle une Vis, (*Fig.* 195.) cette Machine eſt enchaſſée dans une piece de bois nommée *Ecrouë*, laquelle eſt faite endedans auſſi à vis, de ſorte que les élevations de la Vis cylindrique s'engrainent dans le creux de la Vis de l'écroue, au haut du cylindre & quelquefois au bas eſt une piece de bois percée de façon à pouvoir faire paſſer un levier MV, par le moyen duquel une puiſſance en M fait tourner la Vis cylindrique & enleve un poids P attaché à l'extrêmité du cylindre. La diſtance EF d'une élévation du cylindre à l'autre, ſe nomme *Pas de la Vis*, parce que le poids ne ſe trouve être monté à cette hauteur que lorſque le cylindre a fait une révolution entiere autour de ſon axe.

393. PROPOSITION LXV. *Si une puiſſance* M, (Fig. 195.) *eſt en équilibre avec un poids* P *par le moyen d'une Vis, la puiſſance eſt au poids comme la hauteur* EF *de l'un des Pas de la Vis eſt à la circonference dont le rayon ſeroit la longueur* MV *du levier.*

Le poids ne peut s'élever de la hauteur EF, à moins que la puiſſance M ne faſſe une révolution entiere autour du cylindre; ainſi la hauteur EF & la circonference décrite par le point M ſont les viteſſes du poids & de la puiſſance, & par conſéquent nommant c la circonference décrite par M, le moment de la puiſſance M ſera $M \times c$, & celui du poids P ſera $P \times EF$; or par la ſuppoſition, nous avons $M \times c = P \times EF$; donc $M . P :: EF . c$.

394. On dira peut-être que la puiſſance M s'élevant de même que le poids décrit autour du cylindre une ſpirale & non pas une circonference de cercle, & que par conſéquent la viteſſe de la puiſſance devoit être exprimée par cette ſpirale; mais il faut prendre garde que la puiſſance M étant perpendiculaire au levier tend par elle-même à décrire la circonference d'un cercle, & que ſi pendant ſon mouvement elle décrit une ſpirale, cela vient de la diſpoſition de la Machine, ce qui ne change rien. De même que quoique ſur un plan incliné le poids parcoure la longueur de ce

plan, cependant ce plan n'eſt deſcendu dans la direction de ſa peſanteur que de la hauteur du plan.

Du Coin.

395. Le Coin dont on ſe ſert pour fendre le bois eſt un ſolide de bois ou de fer fait en forme de priſme triangulaire, l'une de ſes faces ABEF, (*Fig.* 196.) eſt moindre que les deux autres AFDC, BEDC, leſquelles ſont égales & également inclinées ſur la face AFEB, la ligne CD s'appelle la pointe du Coin, & la face AFEB en eſt la tête; on diſpoſe le Coin dans le bois qu'on veut fendre, de façon qu'il repréſente un triangle iſoſcele ABC, (*Fig.* 197.)

396. PROPOSITION LXVI. *Si une puiſſance qui pouſſe la tête d'un Coin avec une direction* RC, (Fig. 197.) *eſt en équilibre avec la réſiſtance des parties du bois que l'on veut fendre, cette puiſſance eſt à la réſiſtance comme la moitié* AR *du côté* AB *de la tête du Coin eſt à la longueur* AC *de l'un des côtés égaux.*

Suppoſons que la puiſſance ſoit exprimée par la ligne OC, la réſiſtance des parties du bois de part & d'autre du coin ſera perpendiculaire ſur les côtés AC, BC du Coin; c'eſt pourquoi achevant autour de la droite OC priſe pour diagonale le paralellogramme OHCV, les deux réſiſtances égales de part & d'autre feront exprimées par les droites égales HO, VO, & la puiſſance OC ſera à la ſomme des deux réſiſtances comme OC eſt à OH + OV, ou OH + HC. Or les triangles rectangles ARC, XOC étant ſemblables à cauſe de l'angle aigu commun ACR, l'angle XOC eſt égal à l'angle CAR, c'eſt pourquoi les triangles iſoſceles OHC, ACB ſont ſemblables entr'eux; ainſi OC. OH + HC ou 2OH :: AB. AC + CB ou 2AC; or en nommant P la puiſſance, & R la ſomme des réſiſtances, nous avons P. R :: OC. OH + HC ou 2OC; donc P. R :: AB. AC + CB, ou 2AC, ou P. R :: $\frac{1}{2}$AB ou AR. AC.

397. Quand on veut employer le Coin pour élever un poids, alors ce Coin eſt fait comme un plan incliné dont la baſe BC, (*Fig.* 198.) eſt horizontale; & dans le cas d'équilibre la puiſſance eſt au poids, comme la hauteur AC du Coin eſt à ſa baſe CB. Car le Coin ne peut parvenir à la poſition *a*B*c*, à moins que le poids ne ſe ſoit élevé de la hauteur *a*B ou AC, c'eſt pourquoi la droite CB exprime la viteſſe de la puiſſance, & la droite AC

exprime la viteſſe du poids, d'où il ſuit qu'en nommant la puiſſance A, & le poids P le moment de la puiſſance eſt A × BC, & celui du poids en ſuppoſant que quelque choſe l'empêche de gliſſer & de deſcendre le long du coin eſt P × AC, mais dans le cas de l'équilibre, nous avons A × BC = P × AC, donc A. P :: AC. BC.

398. *Remarque.* Dans tout ce que nous venons de dire touchant les machines, nous n'avons conſideré que le cas de l'équilibre; mais delà il eſt aiſé de conclure que pour peu qu'on augmente le rapport de la puiſſance au poids, cette puiſſance enlevera le poids & le fera mouvoir. Je ne m'arrête point ici à parler d'un plus grand nombre de machines, ſi on a bien compris la maniére de calculer celles-ci, on calçulera aiſément toutes les autres plus compliquées, puiſqu'elles ne ſont que des différentes combinaiſons de celles qu'on vient de voir.

De l'Hydrostatique.

399. L'Hydroſtatique eſt la ſcience qui apprend de quelle maniere les corps peſent dans les fluides, & quel eſt le rapport des peſanteurs de différens fluides.

400. Les corps fluides ſont ceux dont les parties ne ſont pas unies entr'eux, & ſe ſéparent ſans peine. On en diſtingue de deux ſortes, les uns dont les ſurfaces ſe mettent de niveau lorſque rien ne les empêche comme l'eau, & tout ce que nous nommons *Liqueurs*, & les autres dont les ſurfaces ne ſe mettent pas de niveau, comme la flamme, la fumée, &c. Nous ne parlons ici que des fluides de la premiere eſpéce.

401. Le volume d'un corps eſt ſon étendue en longueur, largeur & profondeur.

402. Lorſque deux corps ont deux volumes égaux & des peſanteurs inégales, celui qui peſe davantage eſt dit avoir plus de *Peſanteur* ſpécifique que l'autre. Ainſi pour trouver les peſanteurs ſpecifiques de deux ou pluſieurs différentes matiéres, il faut les mettre ſous des volumes égaux.

403. Lorſque deux corps ont des volumes égaux & des peſanteurs inégales, celui qui peſe le plus eſt dit être plus *Denſe*, c'eſt-à-dire avoir ſes parties plus proches les unes des autres; car ſi les parties de l'un ou de l'autre étoient également reſſerrées entr'elles, il y en auroit autant dans l'un & dans l'autre, à cauſe du

volume égal & les pesanteurs seroient égales.

404. On entend donc par le plus ou le moins de densité des corps, le plus ou moins de masses, c'est-à-dire le plus ou moins de matiére qu'ils contiennent sous un même volume. D'où il suit 1°. que si deux corps ont des volumes égaux & des masses inégales, celui qui a plus de masse a plus de densité, & comme une plus grande masse ou une plus grande quantité de matiére pese plus que celle qui en a moins, celui qui a plus de masse a plus de pesanteur que celui qui en a moins. 2°. Que si les volumes sont égaux, les pesanteurs ou les densités sont comme les masses. 3°. Que si les densités sont égales, les masses ou les pesanteurs sont comme les volumes. 4°. Que les volumes étant égaux les pesanteurs spécifiques sont entr'elles comme les pesanteurs absolues; car les pesanteurs specifiques viennent de la différence des masses ou des densités, lesquelles causent les pesanteurs absolues.

405. PROPOSITION LXVII. *Les masses* A *&* B *de deux corps qui ont des volumes différens, sont en raison composée, des densités & des volumes.*

Soit le volume de A triple du volume de B, & sa densité double de la densité de B, je divise le volume de A en trois volumes égaux chacun au volume de B, & par conséquent dans chacun de ces trois volumes la masse est double de la masse du volume de B, puisque sous des volumes égaux les masses sont plus ou moins grandes à proportion du plus ou moins de densité. Donc dans les trois volumes pris ensemble, c'est-à-dire dans le volume de A la masse est trois fois double ou sextuple de la masse de B, ainsi A. B :: 6. 1. or, la raison 6. 1. est composée de la raison 2. 1. des densités & de la raison 3. 1 des masses. Donc, &c.

406. Si l'on nomme M la masse A, D sa densité, V son volume & m, d, u la masse, la densité, & le volume de B, on aura M. m :: D×V. $d \times u$; d'où l'on peut tirer les Corollaires suivans.

407. M. m :: D×V. $d \times u$, donc $M \times d \times u = m \times D \times V$, & partant D. d :: M×u. m×V, c'est-à-dire les densités sont en raison composée de la raison directe des masses, & de la raison inverse des volumes.

De même à cause de $M \times d \times u = m \times D \times V$, nous avons V. u :: M×d. m×D, c'est-à-dire les volumes sont en raison composée de la raison directe des masses & de l'inverse des densités.

408. PROPOSITION LXVIII. *Si deux corps* A, B *pesent également*

leurs pesanteurs spécifiques, sont entr'elles réciproquement comme leurs volumes.

Supposons que le volume de A soit triple du volume du corps B, je divise A en trois volumes qui seront égaux chacun au volume de B, ainsi chacun de ces volumes ne pesera que le tiers de ce que pese B, puisqu'on suppose que A & B pesent également. Or, nous avons dit ci-dessus (*N.* 401.) que pour juger des pesanteurs spécifiques, de deux différentes matiéres ; il faut prendre des volumes égaux de ces matiéres, donc puisque le volume du tiers de A est égal au volume de B, & que le volume de ce tiers ne pese que le tiers du volume de B, il s'ensuit que la pesanteur spécifique de A est à la pesanteur spécifique de B comme 1 est à 3, c'est-à-dire réciproquement comme le volume de B est au volume de A, & ainsi des autres.

409. PROPOSITION LXIX. *Les pesanteurs absolues des corps* A, B *sont en raison composée de la raison de leurs volumes, & de celle de leurs pesanteurs spécifiques.*

Supposons que le volume de A soit triple du volume de B, & que la pesanteur spécifique de A soit double de la pesanteur specifique de B; je divise A en trois volumes égaux, dont chacun sera égal au volume de B. Ainsi le tiers du volume de A pesera deux fois plus que le volume de B, puisque les pesanteurs spécifiques de A & B sont comme 2 à 1, & que ces pesanteurs sont les pesanteurs de deux volumes égaux de A & de B; donc les trois volumes qui composent A peseront trois fois deux fois plus, c'est-à-dire 6 fois plus que le volume de B, & par conséquent la pesanteur absolue de A sera à la pesanteur absolue de B comme 6 est à 1. or, la raison 6. 1. est composée de la raison 3. 1. des volumes de A & B, & de la raison 2. 1. des pesanteurs spécifiques. Donc, &c.

De l'Equilibre des Liqueurs.

410. Dans les corps solides toutes les parties sont tellement liées entr'elles que si leur centre de gravité est empêché de descendre, elles restent toutes en repos autour de lui. Mais il n'en est pas de même des parties des corps fluides, comme elles n'ont aucun lien fixe entr'elles, elles se meuvent en tout sens vers le haut, vers le bas à droite à gauche, &c. & leur surface se met toujours de niveau.

L'expérience constante & uniforme confirme ce que nous venons de dire : qu'on verse peu à peu du vin dans de l'eau, on voit que les parties du vin se dispersent de tous les côtés jusqu'à ce que les deux liqueurs se soient parfaitement mêlées, & alors si l'on ne s'apperçoit plus de ce mouvement, cela provient de l'uniformité de la couleur qui fait qu'on ne distingue plus ce que l'on voyoit auparavant. Si l'on jette du sel dans de l'eau, toutes les parties de l'eau deviennent salées en peu de tems, &c.

411. PROPOSITION LXX. *Si l'on verse d'une même liqueur dans deux tubes ou cylindres creux verticaux* AB, CD (Fig. 199. 200.) *qui se communiquent par un tube horizontal* EF, *& que les deux liqueurs soient de niveau, elles seront en équilibre entr'elles.*

Si les bases EB, PD des deux tubes sont égales (*Fig.* 199.), les colonnes MB, ND de la liqueur sont égales, & par conséquent également pesantes; donc elles pressent également la liqueur du tube horizontal, & l'équilibre doit se trouver entr'elles.

Si les bases EB, PD sont inégales (*Fig.* 200.) les colonnes MB, ND sont entr'elles comme leurs bases EB, PD, à cause des hauteurs égales BI, PN. Or, si la colonne ND descendoit d'une hauteur quelconque NS, il faudroit qu'il passât dans l'autre tube une quantité d'eau égale à NX, & pour cela il faudroit que la hauteur IT à laquelle la colonne MB s'éleveroit fût à la hauteur NS réciproquement comme la base SX ou PD est à la base MI ou EB, car deux cylindres égaux NX, MT doivent avoir les hauteurs réciproques aux bases. Ainsi la vitesse NS avec laquelle la colonne ND descendroit étant à la vitesse IT avec laquelle la colonne MB monteroit réciproquement, comme la colonne MB est à la colonne ND; il s'ensuit que ces deux colonnes ont des forces égales, & que par conséquent elles doivent se tenir en équilibre.

Si l'un des tubes AB (*Fig.* 201.) est incliné à l'horizon & l'autre vertical, j'en conçois un autre *a*B vertical sur la même base EB; or, dans celui-ci la colonne ZB seroit en équilibre avec la colonne ND du tube CD; donc la colonne MB du tube AB doit être aussi en équilibre avec ND, puisqu'elle est égale à la colonne ZB à cause de la base commune EB, & de la hauteur égale; & que si la colonne ND pouvoit descendre, la hauteur à laquelle MB devroit s'élever seroit égale à la hauteur, à laquelle ZB devroit s'élever.

412. Delà il suit que si deux liqueurs de même espéce sont en

équilibre dans deux tubes verticaux, elles doivent être de niveau; car pour peu que le niveau cessât, l'équilibre cesseroit aussi.

413. Proposition LXXI. *Si l'on remplit le tube horizontal EF (Fig. 202.) de mercure ou vif-argent, & que l'on verse dans les deux tubes verticaux & égaux deux liqueurs différentes qui soient en équilibre, les pesanteurs spécifiques de ces liqueurs sont entr'elles réciproquement comme leurs hauteurs.*

A cause que les bases des colonnes MB, ND sont égales, l'une ne peut descendre d'une certaine hauteur que l'autre ne monte à une hauteur égale; ainsi les vitesses de ces deux colonnes étant égales, de même que leurs forces le sont à cause de l'équilibre; il faut que leurs masses soient égales, car les forces ne sont autre chose que les masses multipliées par leurs vitesses, & comme les masses égales ont des pesanteurs absolues égales; il s'ensuit que les colonnes MB, ND pesent également. Supposanr donc que le volume de la colonne MB soit triple du volume de la colonne ND, le tiers du volume de MB ne pesera que le tiers du volume ND; or, le tiers du volume MB est égal au volume de ND, & quand les volumes sont égaux, les pesanteurs spécifiques des matiéres sont comme les pesanteurs absolues de ces volumes égaux; donc la pesanteur spécifique de MB est à la pesanteur spécifique de ND, comme 1 à 3, c'est-à-dire réciproquement comme le volume de ND est au volume de MD, ou comme la hauteur de ND est à la hauteur de MB; car à cause des bases égales, les volumes ND, MB sont comme leurs hauteurs.

414. Donc si l'on connoît la pesanteur spécifique d'une liqueur, on pourra connoître aisément par le moyen de ces tubes la pesanteur spécifique d'une autre liqueur.

415. Proposition LXXII. *Si deux vases* AB, CD (Fig. 203.) *dont les côtés sont perpendiculaires sont remplis d'une même liqueur, les pressions que leurs fonds souffrent sont entr'elles en raison composée de la raison des hauteurs & de celle des bases.*

Les liqueurs qui sont dans les deux vases étant de même nature, leurs masses ou leurs pesanteurs sont entr'elles comme leurs volumes; or, les volumes sont en raison composée de la raison des hauteurs & de celles des bases; donc puisque les masses pressent les fonds avec toute leur pesanteur à cause des côtés perpendiculaires ces fonds sont pressés en raison composée de la raison des hauteurs & de celle des bases.

416.

416. Si les bafes font inégales & les hauteurs égales, les preffions font comme les bafes, fi les bafes font égales & les hauteurs inégales, les preffions font comme les hauteurs, & fi les bafes font égales, & les hauteurs auffi les preffions font égales.

417. Il eft bon de prévenir une objection qu'on pourroit me faire. J'ai dit ci-deffus que fi l'on verfe de l'eau dans deux tubes inégaux AB, CD (*Fig.* 200.) qui fe communiquent par un tube horizontal ED, & que l'eau des deux tubes foit de niveau, les deux colonnes MB, ND font en équilibre. Ainfi l'eau du tube inférieur EF qui foutient les deux colonnes MB, ND fait le même effet que fi l'on mettoit un fonds EB qui foutint la colonne MB, & un fonds PD qui foutint la colonne ND; or, à caufe des hauteurs égales BI, PN, les deux fonds EB, PD feroient preffés dans la raifon de leurs bafes, & comme ces bafes font inégales; les preffions des deux colonnes feroient inégales; donc, dira-t-on peut-être, puifque les deux colonnes preffent inégalement l'eau du tube inférieur EF, il ne peut y avoir d'équilibre entre les deux colonnes, ce qui eft oppofé à ce que j'ai démontré (*N.* 411.).

Pour répondre donc à cette objection, il s'agit de faire voir que quoique les preffions des deux colonnes MB, ND foient inégales, il y a cependant équilibre entre ces deux colonnes, ce que je vais démontrer indépendamment de ce que j'ai dit ci-deffus (*N.* 411.). Suppofons que la bafe EB de la colonne MB ne foit que le tiers de la bafe PD de la colonne ND, je mets au lieu du tube AB un autre tube AX dont la bafe EX foit égale à la bafe PD, & verfant de l'eau dans ce tube AX jufqu'à ce qu'elle foit de niveau avec l'eau du tube CD, les colonnes MX, ND feront égales & leurs preffions auffi, de façon qu'il y aura équilibre entre ces deux colonnes; concevons que chacune de ces colonnes foit divifée en trois colonnes égales, leurs bafes EX, PD feront auffi divifées en trois bafes égales; ainfi les trois colonnes qui compofent la colonne MX feront en équilibre avec les trois colonnes qui compofent la colonne ND chacune à chacune.

Mettons maintenant en EX une cloifon égale à la bafe de deux des colonnes qui compofent la colonne EM, & qui réfifte autant à la preffion des deux colonnes correfpondantes de la colonne ND que les deux colonnes qui étoient au-deffus de cette cloifon; enfin, fur le refte de l'ouverture EB mettons le tube AB, il eft clair que la colonne qui eft le tiers de la colonne ND fera en équilibre avec la colonne MB égale au tiers, & que les deux

autres tiers de la colonne ND trouvant autant de resistance dans la cloison qu'on a mise qu'elles en trouvoient dans les deux colonnes qui étoient au-dessus de cette cloison, seront en équilibre avec elles ; & partant ND ne pourra forcer MB, & il y aura équilibre quoique les deux pressions de MB, ND ne soient pas égales.

418. Si l'un des vases cylindriques AB (*Fig.* 201.) étoit incliné à l'horizon & l'autre CD vertical, il seroit encore vrai de dire qu'en les remplissant l'un & l'autre d'une même liqueur, les fonds seroient pressés dans la raison composée des hauteurs & des bases. Car mettant au lieu de leur fonds un tube horizontal EF, & versant de l'eau dans l'un & dans l'autre, cette eau se mettra de niveau, & la colonne MB sera en équilibre avec la colonne ND (*N.* 411.) ; je mets au lieu du tube incliné AB un tube vertical *a*B de même base, & la colonne ZB sera aussi en équilibre avec la colonne NP, ainsi la colonne ZB, & la colonne MB faisant le même effet presseront également l'eau du tube EF. Or, si au lieu du tube EF, nous mettons aux colonnes ZB, ND deux fonds EB, PD qui soutiennent les pressions de ces colonnes, ces fonds seront pressés en raison composée des bases & des hauteurs, mais la colonne MB presse autant son fonds que la colonne ZB ; donc les fonds des vases MB, ND sont aussi pressés en raison composées des bases & des hauteurs.

Il est visible que tout ce que nous avons dit à l'égard des vases ou tubes cylindriques subsisteroit si les vases ou tubes étoient prismatiques, c'est-à-dire si les bases superieures étoient égales aux inférieures.

419. PROPOSITION LXXIII. *Si l'on remplit d'eau un vase* ABCDEFHL (Fig.204.) *dont la base supérieure* ABCD *soit moindre que le fonds* HLEF, *ce fonds est autant pressé qu'il le seroit si la base supérieure étoit égale à l'inférieure.*

Je conçois un vase prismatique OE de même hauteur, & de même base que le vase ABCDEFHL ; dans ce vase OE que je conçois plein d'eau, je mets deux sections ou cloisons BCPQ, ADRS perpendiculaires sur la base, ensorte que la partie QPSR de sa base HLEF soit égale à la base supérieure ABCD du vase ABCDEFHL. Par cette construction le vase prismatique OE sera divisé en trois vases prismatiques OP, BR, AE, & les pressions de l'eau sur ces trois bases, seront entr'elles comme les bases à cause des hauteurs égales (*N.* 415.) ; & ôtant les cloisons, ces

trois bases seront encore comprimées de la même façon ; car il y aura toujours une même quantité d'eau sur chacune d'elles. Je coupe la colonne d'eau OBQHLPCZ par une cloison diagonale BHLC, de façon qu'ôtant l'eau qui est au-dessus, la cloison presse autant l'eau inférieure de cette colonne qu'elle étoit pressée par l'eau supérieure, il est clair que la base HQPL sera pressée de même qu'elle l'étoit auparavant ; de même si dans la colonne ATFSREXD, je mets une cloison diagonale ADEF qui presse autant l'eau inférieure de cette colonne qu'elle étoit pressée par l'eau supérieure, la base RSFE de cette colonne sera pressée comme elle l'étoit auparavant. Or, les deux cloisons BCLH, ADEF forment avec le reste du vase prismatique OE, le vase donné ABCDEFHL, donc le fonds de ce vase est autant pressé que le fonds du vase prismatique OE qui seroit aussi plein d'eau, & par conséquent le fonds du vase donné est aussi pressé que si sa base supérieure étoit égale à l'inférieure.

420. On dira peut-être que si cette proposition étoit vraye, il s'ensuivroit que le vase prismatique OE plein d'eau ne peseroit pas plus que le vase ABCDEFHL, qui seroit aussi plein d'eau, quoique celui-ci en contienne moins ; mais il faut bien distinguer entre la pesanteur de la masse totale d'un fluide enfermé dans un vase, & les pressions de ce fluide contre le fonds, & les parois du vase ; la pesanteur de la masse totale n'a d'autre direction que celle qui pousse vers le centre de la terre, au lieu que le fluide presse de tous côtés également les parois du vase ; en effet, avant d'avoir mis dans le vase prismatique OE, les cloisons BCLH, ADEF qui coupent diagonalement les colonnes latérales de ce vase, l'eau supérieure à ces cloisons étoit en équilibre avec l'eau inférieure, puisque la surface supérieure de l'eau de vase étoit de niveau ; donc l'eau inférieure des colonnes latérales pressoit autant de bas en haut l'eau supérieure, que la supérieure pressoit l'inférieure de haut en bas. C'est pourquoi les cloisons faisant le même effet que l'eau supérieure doivent être pressées par l'eau inférieure de bas en haut, de la même façon que l'eau supérieure en étoit pressée. Or cela étant, il est visible que les pressions d'un fluide renfermé dans un vase poussant également de toutes parts, ne peuvent augmenter la pesanteur du liquide qui ne pousse que vers le centre de la terre, & que par conséquent la masse d'eau contenue dans le vase prismatique OE étant plus grande que celle qui est contenue dans le vase ABCDEFHL doit peser plus

que cette masse, quoique les pressions sur les fonds soient égales.

421. PROPOSITION LXXIV. *Si l'on remplit d'eau un vase* ABCDEFGH (Fig. 205.) *dont la base supérieure* ABCD *est plus grande que la base inférieure* EFGH, *cette base ou fonds n'est pas plus pressée par la liqueur que si la base supérieure étoit égale à l'inférieure.*

Je conçois un vase prismatique BO dont la base inférieure PSRO soit égale à la base supérieure ABCD du vase donné; ce vase BO étant plein d'eau, je conçois deux sections ZLHG, XQEF perpendiculaires sur la base, ensorte que la partie HGEF du fonds de ce vase comprise entre les deux sections soit égale au fonds du vase donné; ainsi le vase prismatique BO est composé de trois vases prismatiques BH, ZE, XO, & les fonds de ces trois vases sont pressés par les trois colonnes d'eau en raison de ces mêmes fonds, à cause des hauteurs égales des colonnes, & ôtant ces sections ZLGH, XQEF, les pressions des colonnes sur leur fonds sont encore les mêmes. Je conçois dans les deux colonnes latérales deux cloisons CHGB, DAFE qui les coupent diamétralement, de façon qu'ôtant l'eau inférieure, ces cloisons soutiennent l'eau supérieure de la même façon que l'inférieure les soutenoit, il est clair que l'eau supérieure étant en équilibre avec ces cloisons, n'agira point sur le fonds HGFE de la colonne du milieu. Or, les deux cloisons jointes avec le reste du vase prismatique BO composent le vase donné ABCDEFGH; donc le fonds de ce vase n'est pas plus pressé par l'eau qu'il contient, que si sa base supérieure étoit égale à l'inférieure, c'est-à-dire s'il n'y avoit que la colonne du milieu qui le pressât.

422. PROPOSITION LXXV. *Toutes les parties de la surface d'un vase plein d'eau sont pressées en raison composée de leurs grandeurs & de leurs distances à la surface supérieure de l'eau comprise dans le vase.*

Soit un vase AB (*Fig.* 206.) ayant à l'un de ses côtés un tube vertical HL dont la base est HP. Si l'on remplit le vase d'eau, cette eau montera le long du tube & se mettra de niveau avec celle du vase, car on peut considérer le vase comme un tube qui communique avec le tube HL. Je mets en dedans du vase un tube HV qui a pour base l'orifice HP sur lequel il est perpendiculaire, & dont la hauteur HX soit égale à la distance de cet orifice à la surface supérieure de l'eau du vase, c'est-à-dire à la hauteur moyenne NT du cylindre d'eau; ainsi les deux cylindres d'eau HV,

HE ayant même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases, & ces deux cylindres d'eau sont en équilibre, car s'il pouvoit passer dans le cylindre HE une partie HS du cylindre XV, cette partie devroit occuper dans le tube HL un volume EL, égal au volume HS, & partant la hauteur du volume EL seroit à la hauteur du volume HS réciproquement, comme la base HP du volume HS est à la base FE du volume EL, d'où il suit que la vitesse de ces deux colonnes étant entr'elles réciproquement comme leurs volumes, ces deux colonnes ont des forces égales.

De même, si l'on suppose un autre tube extérieur MO, & un autre intérieur MQ dont les hauteurs soient égales, je prouverai de la même façon que les deux colonnes d'eau contenues dans ces tubes sont en équilibre; c'est pourquoi si à la place des orifices HP, MY, je mets deux cloisons qui resistent autant à l'eau des tubes intérieurs que l'eau des tubes extérieurs leur resistoit; il est clair que ces deux cloisons seront pressées dans la raison des deux colonnes d'eau HV, MQ; or, ces deux colonnes sont en raison composée de la raison de leurs bases, & de celles de leurs hauteurs, c'est-à-dire des distances de leurs bases à la surface supérieure de l'eau du vase. Donc les cloisons seront pressées dans la même raison; mais ces cloisons sont des parties de la surface du vase. Donc, &c.

423. De tout ce que nous venons de dire, il suit qu'on pourroit se servir aisément de l'eau pour élever des poids considérables.

Soit un grand bassin AB (*Fig.* 207.) rempli d'eau, & exactement fermé de tous les côtés; j'adapte sur son couvercle deux tubes PR, SX, donc l'orifice P de l'un soit petit, & l'autre ST soit fort grand; si je verse de l'eau dans l'un & l'autre tube, cette eau se mettra de niveau; ainsi supposé que ce niveau soit à la hauteur PH d'un pied, & que l'orifice ST soit cent fois plus grand que l'orifice P, la colonne PH soutiendra la colonne SN cent fois plus pesante qu'elle; & si au lieu de la colonne SN on met un piston sur l'orifice ST sur lequel soit un poids qui avec le piston pese autant que la colonne SN, la colonne PH sera en équilibre avec le piston & le poids; c'est pourquoi si l'on verse de nouveau de l'eau dans le tube PR, cette eau forcera le piston & le poids de monter dans le tube SX.

Supposant donc que la colonne PH contienne un pied cubique d'eau, lequel, selon les expériences, pese 70 livres, cette co-

lonne sera en équilibre avec 100 fois 70 livres, c'est-à-dire avec 7000 livres, & il n'y aura plus qu'à continuer à verser de l'eau dans le tube PR pour élever le poids aussi haut qu'on voudra, mais avec beaucoup de lenteur.

Car, par exemple, si on veut que le poids s'éleve à la hauteur d'un pied, il faudra verser 102 pieds cubiques d'eau, puisque la colonne SN en contiendra 100, & la colonne PH deux, dont l'un sera en équilibre avec la colonne SN, & l'autre avec le poids qui sera sur cette colonne.

Des Corps plongés dans des Fluides qui ont moins de pesanteur spécifique que ces Corps.

424. PROPOSITION LXXVI. *Si l'on plonge un corps dans un fluide qui ait moins de pesanteur spécifique que lui, ce corps perd une partie de son poids, égale au poids d'un volume du fluide égal au volume du corps.*

Supposons qu'un pied cubique de plomb soit plongé dans l'eau, il occupera la place d'un même volume d'eau; or, le poids de ce volume étoit soutenu par celle qui l'environnoit; donc une même quantité de poids du pied cubique de plomb, sera aussi soutenue par l'eau qui l'environne, & par conséquent le plomb pesera moins de toute cette quantité.

425. Donc un corps plongé dans un fluide qui a moins de pesanteur spécifique que lui, ne descend au fond qu'avec une force égale à la différence de son poids au poids du fluide de même volume; & par conséquent la puissance qui peut tenir le corps en équilibre, c'est-à-dire l'empêcher de descendre jusqu'au fonds est égale à cette différence.

426. PROBLEME. *Trouver les pesanteurs spécifiques de différens fluides.*

Je prens une balance ordinaire AB (*Fig.* 208.), je mets à l'extrêmité A un crochet E qui soit en équilibre avec le bassin C suspendu à l'autre extrêmité B. J'attache à ce crochet un crin de cheval d'où pend une bale de plomb P; je pese cette bale dans l'air, & la plongeant ensuite successivement dans chaque fluide; je la pese de nouveau dans chacun d'eux; les pertes de poids que cette bale fait dans les fluides sont les pesanteurs spécifiques de ces fluides.

Car les volumes des fluides dont la bale P occupe la place,

ſont tous égaux entr'eux, & au volume de la bale. Or, le poids de chacun de ces volumes de fluides eſt égal à la perte de poids que la bale fait lorſqu'elle eſt plongée dans le fluide correſpondant. Donc les différens poids des volumes égaux de fluides dont la bale occupe la place ſont égaux aux différentes pertes de poids que la bale fait lorſqu'elle eſt plongée dans ces différens fluides. Mais quand les volumes ſont égaux, les différens poids de ces volumes marquent les peſanteurs ſpécifiques, donc les peſanteurs ſpécifiques des différens fluides dans leſquels la bale eſt plongée ſont exprimées par les différentes pertes de poids que la bale fait.

Par exemple, ſuppoſons que la bale P peſe 12 livres, & qu'étant plongée ſucceſſivement dans deux fluides, elle perde dans le premier 3 livres de ſon poids, & dans le ſecond 4; les deux volumes égaux des fluides dont la bale occupera la place, peſeront donc l'un 3 livres, & l'autre 4; c'eſt pourquoi à cauſe des volumes égaux, les peſanteurs ſpécifiques de ces deux fluides ſeront comme 3 eſt à 4, & ainſi des autres.

427. C'eſt de cette façon qu'on peut connoître le poids d'une liqueur contenue dans un vaiſſeau, & pour cela on meſure la capacité du vaiſſeau par les régles de la Géométrie; puis ſuſpendant au crochet de la balance un pied cubique de plomb, on cherche combien ce pied cubique perd de ſon poids lorſqu'il eſt plongé dans la liqueur; ainſi la perte de poids qu'il fait eſt égale au poids d'un pied cubique de la liqueur; c'eſt pourquoi on dit par Régle de Trois: ſi un pied cubique de la liqueur peſe tant, combien peſera le nombre de pieds cubiques contenus dans le vaſe?

428. PROBLEME. *Trouver les peſanteurs ſpécifiques de deux ou pluſieurs différentes matiéres ſolides.*

Je prens deux poids égaux des deux différentes matiéres données, je mets l'un dans le baſſin C de la balance (*Fig.* 208.), & ſuſpendanr l'autre P au crochet E, ces deux poids ſont en équilibre. Je plonge P dans l'eau, & j'examine ce qu'il perd de ſon poids. Je retire P, & le mettant dans le baſſin C, je tranſporte l'autre poids en E, & je cherche ce qu'il perd de ſon poids lorſqu'il eſt plongé dans l'eau, les deux pertes que ces deux poids ont faits, ſont entr'elles réciproquement comme les peſanteurs ſpécifiques des deux matiéres, ce que je prouve ainſi:

Les deux poids égaux étant de matiéres différentes doivent avoir des denſités, & par conſéquent des volumes différens; car

ce qui conſtitue la différence des matiéres, c'eſt la différence de leurs denſités ; ainſi les volumes d'eau dont ces deux poids occupent la place ſont différens ; mais l'eau étant de même nature ou de même denſité dans l'un & l'autre volume ; les peſanteurs de ces volumes ſont entr'elles comme les volumes ; donc les pertes que les deux poids font dans l'eau, ſont auſſi comme les deux volumes d'eau ou comme les deux volumes des deux poids. Or quand deux poids peſent également, leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entr'elles réciproquement comme leurs volumes ; donc elles ſont auſſi réciproquement comme les pertes que les deux poids font dans l'eau.

Suppoſons que le premier des deux poids égaux ait perdu dans l'eau trois livres de ſon poids, & que l'autre en ait perdu quatre ; le volume d'eau dont le premier poids occupe la place peſera donc 3 livres, & le volume d'eau dont le ſecond occupe la place peſera 4 livres, & ces deux volumes ſeront entr'eux comme 3 à 4 ; de même que les volumes des deux poids. Ainſi la peſanteur ſpécifique du premier poids ſera à la peſanteur ſpécifique du ſecond, comme 4 eſt à 3.

429. C'eſt de cette maniere qu'on a trouvé les peſanteurs ſpécifiques des ſolides ſuivans, ayant tous un volume égal au volume d'une maſſe d'or peſant 100 livres :

Mercure	71 ℔ $\frac{1}{2}$	Etain pur	38 ℔ $\frac{1}{2}$
Plomb	60 $\frac{1}{2}$	Aimant	26
Argent	54 $\frac{1}{2}$	Marbre	21
Or	100	Pierre dure	14
Cuivre	47 $\frac{1}{3}$	Soufre	12 $\frac{1}{2}$
Fer	42	Cire	5
Etain commun	39	Eeau	5 $\frac{1}{3}$

Par le moyen de cette Table, ſi on veut trouver, par exemple, quelle eſt la peſanteur d'un ſolide de plomb dont le volume eſt égal à un volume d'eau peſant 200 livres, on dira par Régle de Trois : la peſanteur ſpécifique $5\frac{1}{3}$ de l'eau eſt à la peſanteur ſpécifique $60\frac{1}{2}$ du plomb, comme la peſanteur 200 livres d'eau eſt à un quatriéme terme qui ſera la peſanteur du volume propoſé du plomb, & ainſi des autres.

Des

Des Corps plongés dans des Fluides qui ont plus de pesanteur spécifique qu'eux.

430. Proposition LXXVII. *Si un corps est jetté dans un fluide qui a plus de pesanteur spécifique que lui, ce corps s'enfoncera dans le fluide jusqu'à ce que le volume d'eau dont il occupera la place, pese autant que le corps.*

Puisque le corps ABCD (*Fig.* 209.) à moins de pesanteur spécifique que le fluide, un moindre volume ABC de ce fluide pesera autant que ce corps; donc quand le corps en s'enfonçant aura chassé ce moindre volume d'eau, les parties du fluide qui soutenoient ce moindre volume soutiendront de la même façon le poids du corps, & par conséquent la partie ADC surnagera.

431. La pesanteur spécifique d'un corps qui en a moins qu'un fluide est à la pesanteur spécifique de ce fluide, comme le volume de la partie du corps qui s'enfonce dans le fluide est au volume total du corps; car puisque le corps & le volume du fluide dont sa partie ABC occupe la place pesent également, les pesanteurs spécifiques du corps & du fluide, sont entr'elles réciproquement comme leurs volumes (*N.* 408.), & par conséquent la pesanteur spécifique du corps est à celle du fluide réciproquement comme le volume ABC du fluide, c'est-à-dire le volume de la partie enfoncée ABC est au volume total du corps ABCD.

432. *Si une puissance* P (Fig. 210.) *tient en équilibre sous la surface d'un fluide un corps* ABCD *qui a moins de pesanteur spécifique que le fluide, la puissance est au poids du corps comme la différence des pesanteurs spécifiques du fluide & du corps est à la pesanteur spécifique du corps.*

Je prens un volume du fluide égal au volume de la partie ABC du corps qui s'enfonceroit librement dans le fluide, & je nomme ce volume de fluide $=x$. Je prens de même un autre volume du fluide égal au volume total ABCD du corps, & je le nomme $=y$; enfin je nomme $=z$ la différence ADC des deux volumes x, y; il est clair que les deux volumes x, y ayant des densités égales, leurs pesanteurs sont entr'elles comme les volumes.

Or quand la puissance P tient en équilibre le corps ABCD sous la surface du fluide, ce corps occupe la place du volume y qui étoit soutenu par le fluide qui l'environnoit, & comme le corps ABCD ne pese pas plus que le volume x; il est évident que ce

corps doit être repoussé en haut par le fluide environnant avec une force égale à la différence des poids des volumes x, y, c'est-à-dire égale à la différence z de ces deux volumes, en exprimant les poids des volumes par x, y; or, la puissance P est égale à la force qui repousse le corps en haut; donc P égal au poids z; mais les pesanteurs spécifiques du corps & du fluide sont entr'elles comme les volumes x, y (*N.* 431.), ou comme les poids x, y; donc leur différence est aussi comme z, & par conséquent la puissance P est au poids ABCD, comme la différence z des pesanteurs spécifiques du fluide & du corps est à la pesanteur spécifique x du corps ABCD.

433. *Mais si la puissance empêche de descendre jusqu'au fonds un corps qui a plus de pesanteur spécifique que le fluide, alors la puissance est au poids du corps comme la différence des pesanteurs spécifiques du corps & du fluide est à la pesanteur spécifique du corps.*

Je nomme x le volume du fluide égal au volume du corps, y le volume du même fluide qui peseroit autant que le corps, & z la différence de ces deux volumes. Ainsi à cause que ces volumes sont de même densité, leurs pesanteurs ou poids sont exprimés par les volumes x. y, & la différence des poids est exprimée par z. Or, l'eau qui environne le corps ne peut soutenir que le poids x; donc le corps dont le poids est égal à y descend vers le fond avec une force égale à z, & par conséquent la puissance qui soutient ce corps est aussi égale à z. C'est pourquoi cette puissance est au corps comme z est à y; mais à cause que le volume y pese autant que le corps, la pesanteur spécifique du corps est à la pesanteur spécifique du fluide réciproquement comme le volume y du fluide est au volume du corps ou à son égal x. Donc les pesanteurs spécifiques du corps & du fluide sont aussi exprimées par y, x, & leur différence par z, & par conséquent la puissance est au corps comme la différence z des deux pesanteurs spécifiques, est à la pesanteur spécifique y du corps.

434. PROBLEME. *Connoissant le poids d'un corps & le rapport de sa pesanteur spécifique à celle d'un fluide qui a moins de pesanteur specifique, connoissant aussi la pesanteur spécifique d'une autre matière qui a moins de pesanteur spécifique que le fluide; déterminer la quantité de cette seconde matière qu'il faut joindre au premier corps, afin que les deux ensemble étant jettés dans le fluide, restent entre la surface du fluide & le fond.*

Soit la pesanteur du premier corps 60 livres, & le rapport de

sa pesanteur spécifique à celle du fluide comme 3 à 1. Donc la pesanteur spécifique de ce corps est à la différence des pesanteurs spécifiques du corps & du fluide, comme le poids du corps est à la puissance qui tiendroit ce corps entre la surface du fluide & le fond (*N.* 432.); faisant donc 3. 3 — 1 ou 3. 2 :: 60. 40, ce quatriéme terme 40 exprimera la puissance qui empêchera le corps de descendre vers le fonds.

Maintenant soit le rapport de la pesanteur spécifique de l'autre matiére à la pesanteur spécifique du fluide comme 1 à 4; donc la différence des deux pesanteurs spécifiques est à la pesanteur spécifique du corps comme la puissance qui doit tenir submergée la partie de cette matiére que je demande, est au poids de cette partie (*N.* 432.); or, cette puissance ayant une direction contraire à la puissance qui tiendroit l'autre corps entre la surface du fluide & le fonds; il est clair que ces deux puissances ne peuvent être en équilibre à moins qu'elles ne soient égales; donc cette seconde puissance doit être aussi $=40$; faisant donc 4 — 1 ou 3. 1 :: 40. $\frac{40}{3}$ ou $13\frac{1}{3}$, ce dernier terme $13\frac{1}{3}$ sera le poids de la seconde matiére qu'il faut unir au premier corps afin qu'en les plongeant dans le fluide, leur masse totale se tienne entre la surface & le fond; car l'une tendant vers le fonds par son poids, & l'autre étant repoussée vers le haut avec des forces égales aux puissances qui les tiendroient entre la surface & le fond, elles se tiendront en équilibre.

Il est évident que pour peu qu'on augmente le poids qui a moins de pesanteur spécifique que le fluide, la masse totale montera jusqu'à la surface de l'eau, & qu'au contraire si l'on augmente l'autre poids, la masse totale ira au fond, & on peut tirer aisément la maniére de faire remonter sur la surface de l'eau les corps submergés.

De l'Airométrie ou Mesure de l'Air.

435. L'Air est un fluide qui environne la terre, & qui se trouve dans tous les lieux d'ici-bas où il nous semble qu'il n'y a rien.

436. L'air pese, il a du ressort, il est capable d'être comprimé, de se dilater, d'être rarefié par la chaleur, ou condensé par le froid, ce que l'on connoît par les expériences dont nous parlerons bien-tôt.

437. On entend donc par le mot d'*Airométrie* ou de Mesure

de l'air ; la ſcience qui nous apprend à connoître les différens degrés de peſanteur, de reſſort, de compreſſion, de dilatation, &c. qui ſe trouvent dans le fluide qui environne la terre, ſelon les différens changemens qui peuvent lui arriver.

438. Si l'on pouſſe la main rapidement vers le viſage ſans cependant le toucher, on ſent un certain effort qui fait voir que quoiqu'il ſemble que la main ſe meuve dans un eſpace vuide, il faut cependant qu'elle pouſſe vers le viſage quelque corps, & c'eſt ce corps que nous nommons *Air*.

439. Si l'on prend un vaſe exactement fermé de tous les côtés, & qu'après y avoir fait un petit trou ou orifice auquel on adapte un robinet bien fermé on le peſe, & qu'enſuite par le moyen d'un cylindre creux avec un piſton en forme de ſeringue on introduiſe dans ce vaſe une plus grande quantité d'air qu'il ne contient ; on trouve en fermant le robinet, & remettant le vaſe dans la balance qu'il peſe plus qu'il ne peſoit auparavant ; que ſi on ouvre alors le robinet, & qu'on mette la main près de l'ouverture on ſent ſortir l'air, après quoi ſi l'on peſe de nouveau le vaſe, on trouve qu'il n'a plus que ſon premier poids.

Or, de-là il ſuit 1°. que l'air a de la peſanteur, puiſque l'augmentation du poids du vaſe ne peut être attribuée qu'à la plus grande quantité qu'on y a fait entrer. 2°. Que cette peſanteur tend vers le centre de la terre, puiſqu'elle pouſſe le baſſin de la balance vers ce centre. 3°. Que l'air peut ſe condenſer, car le volume du vaſe étant toujours le même en contient tantôt plus, tantôt moins. 4°. Qu'il ſe peut dilater, puiſqu'il ſort, dès qu'on ouvre le robinet, ce qui provient de ce que le premier air qui étoit dans le vaſe tend à reprendre ſon volume. 5°. Enfin, que l'air a du reſſort qui le pouſſe à ſe dilater de tous côtés, car ſoit qu'on mette la main vis-à-vis l'orifice ou en deſſus ou en deſſous, ou à droite ou à gauche, on ſent toujours ſortir l'air, à la différence des autres liquides qui ſortant d'un vaſe ne ſortent que d'un côté, c'eſt-à-dire vers le centre de la terre.

440. Si après avoir ſoufflé dans une veſſie de porc juſqu'à ce qu'elle ſoit médiocrement enflée, & qu'ayant ſerré fortement ſon ouverture pour empêcher l'air d'en ſortir ; on l'approche du feu de plus en plus, elle crévera enfin en faiſant un grand bruit, mais ſi avant qu'elle créve on la retire d'auprès du feu, elle ſe déſenflera peu à peu, & ſe remettra dans ſon premier état ; que ſi on la tranſporte dans un air beaucoup plus froid, elle ſe mettra dans

un moindre volume que celui où on l'avoit mise en soufflant dedans.

Or, ceci fait voir que la chaleur rarefie l'air, & augmente son ressort, & qu'au contraire le froid le condense & diminue la force de son ressort; ses parties se trouvant moins tendues dans le froid que dans la chaleur.

441. Si l'on prend un canon ou un cylindre creux AB (*Fig.* 211.), & qu'après avoir mis deux bouchons aux extrêmités A, B on pousse le bouchon B vers le bouchon A, on éprouve que le bouchon B étant parvenu à une certaine distance AE du bouchon A, celui-ci part rapidement & avec bruit.

Or, comme cela ne peut arriver que parce que l'air qui étoit compris entre le bouchon A & le bouchon B se trouve trop comprimé lorsque B est parvenu en E; il s'ensuit qu'une trop grande compression de l'air augmente son ressort; ainsi un trop grand froid qui condenseroit trop l'air augmenteroit son ressort au lieu de le diminuer; & l'on peut dire de même qu'une trop grande chaleur feroit perdre à l'air tout son ressort; la raison en est que le ressort de l'air n'étant pas d'une force infinie, une trop grande dilatation doit enfin le briser.

442. L'air trop comprimé fait effort pour se dilater, & s'échape enfin par l'endroit qui lui resiste le moins. De même l'air dilaté par la chaleur faisant effort contre les corps qui l'environnent fait ceder ceux qui lui resistent moins, & c'est pour cette raison que les Mineurs placent leurs mines de façon que les terres qu'ils veulent enlever resistent moins que les autres terres qui environnent leurs fourneaux. Si l'on pouvoit comprimer l'air dans la chambre d'une mine aussi aisément qu'on le dilate par le feu qu'on met à la poudre, on feroit sauter les terres qui sont au-dessus avec la même facilité. L'expérience du cylindre AB fermé par les deux bouchons A, B en est une preuve; de même que les arquebuses à vent.

443. Qu'on prenne un tube AC (*Fig.* 212.) dont la longueur surpasse 32 pieds, qu'on bouche l'ouverture inférieure C, & qu'après l'avoir rempli d'eau & plongé verticalement dans un vase DE aussi plein d'eau, on debouche l'ouverture C, l'eau du tube descendra en forçant celle du vase de se répandre jusqu'à ce qu'elle soit parvenue en M où sa surface sera de niveau avec celle de l'eau du vase; ainsi que nous l'avons démontré dans l'Hydrostatique; mais si avant de déboucher l'ouverture C on ferme exacte-

ment l'ouverture A, & qu'ensuite on debouche C, l'eau du tube descendra jusqu'à ce que la surface supérieure soit au-dessus de la surface de l'eau du vase de la hauteur de 32 pieds, après quoi elle ne descendra plus.

Or, ceci fait voir qu'une colonne d'air dont le diamétre est égal au diamétre du tube, & dont la hauteur s'étend depuis la surface de l'eau du vase jusqu'au lieu le plus élevé de l'air, ne pese pas plus que la colonne d'eau du tube BN de 32 pieds de hauteur; ce que je prouve ainsi:

Supposons que les côtés du vase soient perpendiculaires sur le fonds, & qu'ils soient prolongés jusqu'à la hauteur de 32 pieds au-dessus de la base supérieure DH; supposons aussi que le fonds VE soit cinquante fois plus grand que l'ouverture C du tube; il est clair que si on remplir d'eau le vase ainsi prolongé, l'eau comprise entre DH & RS sera cinquante fois plus grande que l'eau du tube; c'est-à-dire, que l'eau qui environnera le tube est à l'eau du tube comme 49 est à 1, & partant cette eau pesera autant que 49 colonnes égales à la colonne d'eau du tube; mais par les Régles de l'Hydrostatique l'orifice A étant débouché, les 49 colonnes soutiennent la colonne du tube sans la faire monter au-dessus de leur niveau; & par l'expérience dont nous venons de parler, si on bouche A, & qu'on retranche les 49 colonnes, l'air qui pese sur DH soutient la colonne du tube à la même hauteur; donc cet air pese autant que les 49 colonnes, & par conséquent une colonne de cet air; de même base que l'orifice C, & dont la hauteur s'étend depuis la surface DH jusqu'au lieu le plus élevé de l'air pese autant que la colonne d'eau du tube de 32 pieds de hauteur.

On dira peut-être que les 49 colonnes d'eau soutiennent la colonne d'eau du tube non-seulement par leur propre poids; mais encore par celui des colonnes d'air qui leur sont perpendiculaires, & que par conséquent quand on supprime les 49 colonnes d'eau, & que l'air qui prend leur place, fait le même effet, il faut que ce soit les 49 colonnes d'air de même hauteur que les 49 colonnes d'eau qui pesent autant que ces colonnes. Mais il faut prendre garde que j'ai dit qu'en mettant les 49 colonnes d'eau on laisse l'orifice A ouvert; ce qui fait tomber l'objection, car si les 49 colonnes d'eau sont pressées par l'air qui pese sur elles, la colonne d'eau du tube est aussi pressée par l'air qui lui est vertical, & comme l'air se met de niveau comme les autres fluides,

& que par conséquent sa hauteur est par tout à égale distance de la surface de la terre en concevant que cette surface soit par-tout à égale distance de son centre ; il s'ensuit que l'air qui pese sur les 49 colonnes d'eau est à celui qui pese sur la colonne du tube, avec lequel il est en équilibre comme 49 à 1, & partant le poids de l'air qui est sur les 49 colonnes d'eau est au poids de l'air qui est sur la colonne du tube comme 49 est à 1 ; de façon que le poids des 49 colonnes d'eau joint au poids de l'air supérieur est au poids de la colonne du tube joint au poids de l'air qui pese sur elle encore comme 49 est à 1 ; mais le poids des 49 colonnes d'eau & de l'air qui les charge est en équilibre avec le poids de la colonne du tube & de l'air supérieur ; donc supprimant de part & d'autre le poids de l'air, le poids seul des 49 colonnes d'eau soutiendroit le poids seul de la colonne d'eau du tube, à cause de la raison 49 à 1 qui feroit toujours la même. Or de la maniere dont est faite l'expérience dont nous venons de parler, l'air qui est au-dessus de la colonne du tube ne presse point cette colonne, puisque l'orifice A est bouché exactement, donc l'air extérieur qui pese sur la base DH, ne soutient précisément que le poids de cette colonne lorsqu'elle est à la hauteur de 32 pieds, & par conséquent cet air pese autant que le poids des 49 colonnes pris en lui-même & indépendamment de l'air qui peseroit sur lui.

444. Une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur est en équilibre avec une colonne de mercure de même base & d'environ 28 pouces de hauteur, ainsi que les expériences journalieres le font voir ; donc une colonne d'air de même base, & qui s'étend jusqu'au lieu le plus élevé de l'air est en équilibre avec une colonne d'environ 28 pouces de mercure, & pese autant qu'elle.

445. La masse totale de l'air qui environne la terre, se nomme *Atmosphere*, & une colonne de cet air qui est en équilibre avec une colonne de même base, & qui contient 28 pouces de mercure ou 32 pieds d'eau, se nomme *Poids de l'Atmosphere*.

446. L'air inférieur étant toujours comprimé par l'air supérieur tend à se dilater avec une force égale à celle qui le comprime, car c'est la nature de tout ressort de resister autant qu'il est pressé.

Si l'air est renfermé dans un vase, sans être ni plus ni moins comprimé que l'air extérieur, son ressort est le même que s'il n'étoit point renfermé, car on ne voit pas ce qui pourroit l'avoir alteré ; donc l'air renfermé presse la surface intérieure du corps qui le renferme, de même que l'air extérieur presse la même surface.

447. Soit un Vase AB, (*Fig.* 213.) bien fermé de tous les côtés, ayant un orifice C auquel soit adapté un robinet R par l'ouverture duquel l'air entre dans le Vase; soit adapté au tuyau du robinet un cylindre creux ayant une ouverture S avec son couvercle P, & un piston IL; que le tout soit fait de façon que le piston IL en avançant dans le cylindre ne donne point de passage à l'air non plus que le robinet lorsqu'il est fermé, ni le couvercle P lorsqu'il est sur l'ouverture S. Je ferme le robinet & je pousse le piston jusqu'à ce qu'étant parvenu en H il ait chassé hors du cylindre l'air qui y étoit contenu; je ferme l'ouverture S, & ouvrant le robinet je retire le piston jusqu'en I, alors l'air du Vase qui se trouve comprimé entre ses parois, de même qu'il le seroit par l'air supérieur au Vase se dilate du côté du cylindre où il ne trouve aucune résistance; je ferme de nouveau le robinet, afin que la partie d'air qui est passé du Vase dans le cylindre ne puisse plus rentrer dans le Vase, & ouvrant le couvercle P, je repousse le piston jusqu'en H pour chasser hors du cylindre la portion d'air qu'il contient; j'ouvre de nouveau le robinet en fermant le couvercle P & retirant le piston en I, l'air qui étoit resté dans le Vase se dilate de nouveau du côté du cylindre où il ne trouve aucune résistance; c'est pourquoi si je ferme le robinet, & qu'après avoir ôté le couvercle P, je pousse encore le piston vers H, je mettrai hors du cylindre cette seconde portion d'air du Vase qui y étoit passée; & continuant de la même façon, il est clair que je puis épuiser l'air du Vase, de façon que la partie qui en restera soit si peu considérable qu'on puisse la compter pour rien.

Cette Machine que je viens de décrire & dont on vient de voir l'usage, se nomme Machine *Pneumatique*, ou Machine *du Vuide*, ou du moins elle n'en differe qu'en ce qu'on lui a ajouté des parties nécessaires pour en faciliter le jeu; & c'est par son moyen qu'on a fait grand nombre d'expériences dont on a tiré bien des théorêmes touchant les proprietés de l'air, de la lumiere, du son, &c.

Par exemple, si dans le Vase ou Récipient dont on a fait sortir l'air, on laisse tomber d'une même hauteur deux corps d'inégale pesanteur, on éprouve que ces deux corps descendent avec la même vitesse & parcourent dans le même tems des espaces égaux; & de-là on a eu raison de conclure que la pesanteur d'un corps est toujours proportionnelle à sa masse. Car, supposons que la masse du premier corps soit double de la masse du second, les vitesses

viteſſes de ces corps étant égales, leurs quantités de mouvement ſeront entr'elles comme leurs maſſes, & par conſéquent leurs forces ſeront auſſi dans la même raiſon; or les forces motrices des corps peſans qui tendent vers le centre de la terre ſont leurs peſanteurs; donc les peſanteurs des deux corps ſont entr'elles comme les maſſes.

De même, ſi l'on ſuſpend une petite ſonnette dans le Vaſe ou Récipient, & qu'après en avoir fait ſortir l'air qu'il contient, on faſſe tinter la ſonnette, on n'entend aucun ſon, ce qui fait voir que le ſon ne vient à nos oreilles que par l'ébranlement de l'air cauſé par le frémiſſement des parties du corps qu'on frappe pour le faire ſonner.

De même encore, ſi l'on met de la poudre dans le Récipient, & qu'après en avoir fait ſortir l'air, on mette le feu à la poudre par le moyen d'un verre ardent, on éprouve que les grains de poudre s'embrâſent avec peine & ne font aucune détonation, ce qui fait voir que les effets de la poudre viennent du reſſort de l'air qui ſe trouve dilaté par la chaleur du feu qu'on y porte; & il en eſt de même de grand nombre d'autres expériences qu'on peut lire dans tous les Ouvrages de Phyſique, & qu'il ſeroit inutile de rapporter ici.

448. Puiſque la ſurface de l'atmoſphére eſt partout à égale diſtance du centre de la terre, & que l'air inférieur eſt comprimé par le poids de l'air ſupérieur, il s'enſuit; 1°. Que plus l'air inférieur ſera éloigné du ſommet de l'atmoſphere, plus il ſera comprimé. 2°. Que les differentes couches d'air ſont plus ou moins comprimées ſelon leur plus ou moins de diſtance au ſommet de l'atmoſphere. 3°. Que la peſanteur de l'air devroit être égale dans tous les lieux de la terre qui ſont de niveau, & que par conſéquent ſa denſité devroit y être auſſi la même. Or ſi ceci ne ſe trouve preſque jamais, la raiſon en eſt que la chaleur ou le froid qui augmentent & diminuent le reſſort de l'air, varient ſelon les lieux, les ſaiſons & les climats, & que les vapeurs & exhalaiſons qui ſortent du ſein de la terre ne ſont pas en même quantité partout: & c'eſt auſſi à ces variations qu'il faut rapporter l'origine des vents.

Par exemple, ſi ſur certaine partie de la terre l'air vient à ſe condenſer par le froid, & par conſéquent à perdre de ſa force élaſtique, l'air des parties voiſines ſe répandra de ce côté-là, & on ſentira un vent plus ou moins fort, ſelon que la condenſation

fera plus ou moins grande, ou se fera faire plus ou moins vîte.

Si une portion d'air vient à être échauffée par le Soleil ou par quelqu'autre cause, son ressort s'augmentant s'étendra sur les parties voisines qui en ressentiront du vent; mais si ce même air après avoir été échauffé vient à se réfroidir, son ressort s'affaissera, & les parties voisines reprenant le dessus, le vent soufflera sur l'air qui se sera condensé.

Si, lorsqu'il s'éleve de la terre grand nombre d'exhalaisons & de vapeurs aqueuses, ces vapeurs soulevant l'air le rendent moins pesant; mais si après qu'elles se sont élevées, elles se trouvent suspendues sans pouvoir s'élever davantage ni descendre, l'air qui en est chargé devient plus pesant jusqu'à ce que ces vapeurs trop multipliées viennent à tomber & se résoudre en pluye ou en rosée, & alors l'air redevient plus léger. Les vents contribuent aussi beaucoup à rendre l'air plus ou moins pesant, selon qu'ils soufflent de haut en bas ou du bas en haut, & il faut dire la même chose de la chaleur & du froid.

449. Pour s'assurer & connoître mieux les differens degrés de pesanteur, de densité, de chaleur, de froid & d'agitation qui se trouvent dans l'air, on a inventé plusieurs Instrumens dont nous allons parler.

Du Barometre.

450. Le *Barometre* ou *Barascope* est un Instrument dont on se sert pour connoître les differentes pesanteurs de l'atmosphere dans differens tems.

Pour composer un Barometre, on prend un tube AB (*Fig.* 214.) dont la longueur surpasse 30 ou 31 pouces, & dont l'extrêmité A soit exactement fermée; on le remplit de Mercure par l'extrêmité B, après quoi bouchant cette extrêmité B avec le doigt, on plonge le tube verticalement dans un vase DE plein de Mercure, & débouchant alors l'extrêmité B, le Mercure demeure suspendu à 28 pouces de hauteur plus ou moins, selon que le poids de l'atmosphere est plus ou moins grand, de façon que les variations des differentes hauteurs sont comprises dans l'espace de 3 pouces, c'est-à-dire que le Mercure ne descend guéres plus bas que la hauteur de 26 pouces $\frac{1}{2}$ au-dessus du Mercure du vase DE, & qu'il ne s'éleve guéres plus haut qu'à 30 pouces $\frac{1}{2}$. On adosse à côté du tube une planche où l'on marque des di-

visions égales pour marquer les differences des élevations du Mercure.

Comme le vent de *Nord* & celui de *Nord-Est* condensent l'air, non-seulement par leur froideur, mais encore parce qu'en soufflant du haut en bas ils pressent l'air supérieur sur l'air inférieur, le poids de l'atmosphere devient plus pesant, & le Mercure s'éleve par consequent dans le Barometre; ainsi à cause que ces deux vents amenent ordinairement le beau tems, on pronostique par l'élevation du Mercure dans le Barometre que le beau tems doit regner.

Au contraire le vent de *Sud* & celui de *Sud-Oüest* soufflent de bas en haut, & soulevent l'air, ce qui rend l'atmosphere moins pesant; c'est pourquoi le Mercure baisse dans le Barometre, & en ce cas si le vent continue, ou s'il tourne vers le Nord en passant par l'Ouest, c'est ordinairemenr signe de pluye; mais s'il tourne vers le Nord en passant par l'Est, c'est signe que le beau tems reprendra le dessus.

Ces sortes de pronostiques ne sont pas si sûrs qu'on se l'imagine ordinairement, & la raison en est que l'atmosphere peut avoir la même pesanteur par plusieurs causes differentes qui ne sont pas toujours celles qu'on s'imagine. Le chaud, le froid, ou quelqu'autre cause peuvent altérer la densité de l'air inférieur sans altérer le poids total de l'atmosphere, il peut se faire qu'une partie de l'air supérieur se dilate dans la même proportion que l'air inférieur se condense, que quoique l'air inférieur se dilate & devienne moins pesant, l'air supérieur au contraire se condense & compense par le poids de sa densité le poids qui s'est perdu par la dilatation inférieure; de plus, les vents & le mélange des vapeurs se combinant de differentes façons peuvent produire le même poids, &c. c'est pourquoi tout ce que nous pouvons conclure de l'usage du Barometre, c'est de nous faire connoître les differentes pesanteurs de l'atmosphere en differens tems, sans pouvoir nous faire connoître les véritables causes qui produisent ces changemens; encore faut-il bien observer que le Barometre se trouve dans un lieu où le degré de chaleur ou de froid soit à peu près toujours le même. Car quoique le Mercure soit de tous les liquides celui qui souffre le moins d'altération du côté du chaud & du froid, cependant il ne laisse pas que d'en souffrir, & il est bon d'y faire attention.

Du Manometre, ou Manoſcope.

451. Le *Manometre* eſt un Inſtrument qui ſert à connoître les differentes denſités de l'air inférieur.

Puiſqu'il peut ſe faire que l'air inférieur ſoit plus ou moins denſe ſans que le poids de l'atmoſphere diminue, il eſt clair que le Barometre ne peut ſervir à découvrir les differentes denſités de l'air inférieur, & qu'il a fallu pour cela imaginer un autre Inſtrument.

Pour conſtruire donc cet Inſtrument, on prend un grand vaſe de cuivre Q, (*Fig.* 215.) dont on fait ſortir l'air; on peſe ce vaſe vuide, & l'on prend une matiere bien peſante, comme du plomb & qui peſe autant que le vaſe; on attache le vaſe à l'extrêmité B, & le poids à l'extrêmité A d'un levier AB, dont les bras AD, DB ſont égaux, & dont le centre C de mouvement ſoit un peu au-deſſus du milieu D du levier; enfin on met au-deſſus du centre C de mouvement un quart de cercle gradué MN, dont le rayon ſoit la languette CL du levier: & l'Inſtrument eſt fait.

Pour ſe ſervir de cet Inſtrument, on peſe le vaſe & le poids dans l'air, & ſi le levier reſte dans une poſition horizontale, c'eſt marque que l'air eſt auſſi denſe qu'il l'étoit lorſqu'on a fait l'Inſtrument, mais ſi le poids emporte le vaſe, l'air eſt plus denſe; & ſi au contraire le vaſe emporte le poids, ſa denſité eſt moins grande, & la languette marque ſur le quart de cercle les degrés du plus ou moins de denſité.

Pour rendre raiſon de ceci, il faut obſerver; 1°. Que le vaſe Q a toujours plus de volume que le poids P, à cauſe du vuide que ce vaſe contient, & que par conſéquent à cauſe de l'égalité de poids, la peſanteur ſpécifique du poids P eſt plus grande que la peſanteur ſpécifique du vaſe; 2°. Que de quelque denſité que l'air puiſſe être, le vaſe & le poids ont toujours chacun plus de peſanteur ſpécifique que l'air. Cela poſé.

Quand l'air devient plus denſe qu'il n'étoit dans le tems qu'on a fait la Machine, & que le vaſe & le poids étoient en équilibre, il arrive la même choſe que ſi l'on plongeoit le vaſe & le poids dans un fluide qui eut moins de peſanteur ſpécifique qu'eux; or en ce cas, le poids P perdroit une partie de ſon poids égale au poids d'un volume de ce fluide égal au ſien, & la même choſe arriveroit au vaſe; ainſi à cauſe du volume du vaſe plus grand que

le volume du poids P, le poids P perd moins que le vase, & par conséquent il doit descendre vers le centre de la terre & enlever le vase. Suppofant donc que leur centre commun de gravité dans ce fluide soit en H, ce centre descendra jusqu'à ce qu'il soit dans la verticale CH, & comme il ne pourra descendre plus bas, il y aura alors équilibre, & le levier sera dans la position oblique SV, & la languette se trouvant alors dans la position CI, son extrêmité I marquera sur le quart de cercle de combien de degrés l'air est plus dense.

Si au contraire l'air devient moins dense que dans le tems où le poids & le vase étoient en équilibre dans la situation horizontale du levier, il arrivera la même chose que si l'un & l'autre étoient plongés dans un fluide qui auroit moins de pesanteur spécifique que celui dans lequel ils étoient auparavant; supposant donc que la pesanteur spécifique de ce fluide fut à la pesanteur spécifique du précédent comme 1 à 2, les volumes de ce second fluide dont le poids & le vase occuperoient la place ne peseroient que la moitié des volumes du premier fluide dont ils occupoient la place, & par conséquent le poids & le vase peseroient de cette moitié plus dans le second fluide. D'où il suit que le poids du vase à cause de son volume plus grand deviendroit aussi plus grand que le poids du plomb, & par conséquent l'enleveroit. Donc, &c.

Du Thermometre.

452. Le Thermometre ou Thermoscope a été inventé pour connoître les differens degrés de chaleur & de froid dans l'air.

Soit un vase de verre sphérique AB, (*Fig.* 216.) auquel soit adapté un tube CD soudé avec la même matiere, qu'on y verse de l'eau par le trou D en y laissant une certaine quantité d'air, qu'on bouche ensuite avec le doigt le trou D, & qu'on plonge la tube verticalement dans un autre vase EF plein d'eau où l'on débouchera le trou D. L'air qu'on aura laissé dans le tube montera dans le vase sphérique AB au dessus de l'eau, & comme au commencement il sera pressé par les parois du vase, de même qu'il le seroit par l'air supérieur, il forcera l'eau de descendre; mais cette eau en descendant laissera à cet air un espace qui seroit occupé par une masse d'air extérieure plus grande que la masse de l'air intérieur; c'est pourquoi l'air extérieur ayant alors plus de pesanteur spécifique que l'air intérieur, & d'ailleurs étant

chargé de l'air fupérieur empêchera l'eau de defcendre jufqu'au niveau de celle du vafe, & la tiendra fufpendue à une certaine hauteur. Or les chofes étant dans cet état, s'il arrive que la chaleur échauffe l'air, cette chaleur dilatera l'air intérieur, & celui-ci trouvant de la réfiftance du côté des parois du vafe portera toute fa preffion fur l'eau du vafe & du tube & la fera defcendre : au contraire, fi le froid vient à condenfer l'air intérieur, le reffort de cet air venant à diminuer preffera moins l'eau du vafe & du tube qu'il ne faifoit auparavant, & partant l'air extérieur fera monter l'eau. Ainfi on pourra connoître par-là les differens changemens de chaleur & de froideur qui arriveront à l'air.

Comme il peut fort bien fe faire que l'air devienne plus ou moins pefant fans changer de degré de chaleur ou de froideur, ainfi que nous l'avons obfervé en parlant du Barometre, il eft évident que l'Inftrument dont nous venons de donner la conftruction eft très-défectueux pour nous faire connoître les differens degrés de chaleur & de froideur dont l'air eft fufceptible, c'eft pourquoi Meffieurs les Académiciens de Florence ont imaginé le Thermometre fuivant, après s'être apperçûs des condenfations & des dilatations que l'Efprit-de-Vin fouffre de l'action du froid & du chaud.

On prend un long tube AB, (*Fig.* 217.) on adapte à fon extrêmité B un vafe fphérique; on y verfe de l'Efprit-de-Vin par l'ouverture A, puis on met le globe dans de l'eau à la glace, & alors l'Efprit-de-Vin fe condenfant par le froid, defcend, & l'on obferve la hauteur où il refte laquelle doit être au-deffus de l'entrée. Cette hauteur que je fuppofe être BH, fait connoître le plus bas degré auquel l'Efprit-de-Vin puiffe defcendre dans le plus grand froid. On tire le globe hors de cette eau que l'on fait chauffer jufqu'à ce que l'Efprit-de-Vin foit prêt à bouillir: alors l'on obferve la hauteur BT à laquelle l'Efprit-de-Vin eft monté, & comme c'eft la plus grande à laquelle il puiffe s'élever dans les chaleurs de l'Eté, on ferme le tube en T, avant même que l'Efprit-de-Vin ait eu le tems de defcendre en fe refroidiffant; cela fait, on adoffe le globe & le tube à une planche, & l'on marque à côté du tube entre H & T plufieurs divifions égales, qu'on nomme *Degrés*.

Quand le froid augmente, la liqueur fe condenfe & defcend; au contraire, quand la chaleur augmente, la liqueur fe dilate & par conféquent s'éleve, puifqu'elle occupe alors un volume plus

grand; ainsi il paroît que ce Thermometre est beaucoup meilleur que le précédent: néanmoins il a aussi ses défauts; car, 1°. Quand il fait froid, la liqueur en descendant acquiert une vitesse qui augmente son degré de compression; & au contraire, quand il fait chaud, la pesanteur de la liqueur l'empêche de monter aussi haut qu'elle le devroit par sa raréfaction; 2°. Quand la liqueur se condense par le froid il en sort de l'air, & quand elle se raréfie, l'air qui se raréfie y entre beaucoup moins vîte qu'il n'en étoit sorti, ainsi que plusieurs expériences nous en assurent, c'est pourquoi la liqueur ne s'éleve pas autant qu'elle le feroit sans cet obstacle. On ne peut donc juger exactement par ce Thermometre des differens degrés de chaleur & de froid de l'air, quoique c'étoit le meilleur qu'on ait pû imaginer.

De l'Hygrometre.

453. L'*Hygrometre* a été inventé pour connoître les differens degrés de secheresse & d'humidité que l'air peut contracter; on en fait de plusieurs sortes, mais je me contenterai d'en rapporter ici deux des meilleurs.

On attache à un point fixe E une corde, (*Fig.* 218.) qu'on fait passer sur plusieurs poulies A, B, C, D, H disposées comme la Figure le montre, & on atttache à l'extrêmité de la corde un poids P. Quand l'air deviant humide la corde se gonfle, & par conséquent se racourcit, ce qui fait monter le poids; au contraire dans les tems secs les fibres de la corde s'étendent, & le poids descend; ainsi par les differens éloignemens du poids P à la poulie H on peut juger de l'humidité ou de la secheresse de l'air. Mais cet Hygrometre & tous ceux qui sont faits avec des cordes ont ce défaut que le poids tirant toujours la corde en fait allonger les fibres beaucoup plus que l'humidité ne peut les faire raccourcir. C'est pourquoi j'aimerois mieux l'Hygrometre suivant.

Prenez une Balance semblable à celle du Manometre (*Fig.* 215.) suspendez en B une éponge au lieu du vase Q, & en A un poids P qui soit en équilibre avec l'éponge. Quand l'air deviendra plus humide, l'éponge se chargera de ses vapeurs, & pesera davantage, ce qui fera hausser le poids, & au contraire quand l'air deviendra plus sec, l'éponge se dessechant deviendra plus legere, & le poids l'emportera, c'est pourquoi dans l'un & dans l'autre cas la lan-

guette de la Balance marquera fur le quart de cercle MN les differences d'humidité ou de fechereffe.

454. *Remarque.* La connoiffance des varietés de l'air & la maniere d'en juger peuvent fervir beaucoup pour nous faire raifonner jufte touchant les effets de la poudre à canon, en y ajoutant le fecours des épreuves. Mais il faut prendre garde que ces épreuves foient faites avec beaucoup de difcernement, qu'on fçache y démêler les véritables caufes des variations de l'air; car on vient de voir qu'il y en a d'équivoques, & qu'on écarte auffi du côté de la poudre & des Bombes à feu tous les accidens qui peuvent provenir d'autre part, & dont nous avons parlé en traitant du jet des Bombes. De plus il faut que les épreuves fur lefquelles on prétend s'appuyer foient des épreuves conftantes régulieres, & qui ne fe démentent jamais. Faute de prendre ces précautions, il arrive qu'on bâtit des fyftêmes, ou pour mieux dire des châteaux en Efpagne qui fe diffipent dès qu'on veut en fonder la folidité.

Par exemple, on établit pour regle affurée qu'une même charge de poudre dans un même canon porte plus loin lorfqu'on tire avant le lever du Soleil que lorfqu'on tire fur l'heure de midi. Plufieurs expériences, dit-on, nous en convainquent, & la raifon qu'on en donne, c'eft que l'air étant plus dilaté par la chaleur à l'heure de midi que le matin, réfifte davantage au mouvement du boulet; tout cela va fort bien, mais ne peut-il pas fe faire qu'il faffe le matin un grand froid qui condenfe extrêmement l'air, que l'atmofphere fe trouve chargé de vapeurs & d'exhalaifons qui rendent cet air plus pefant; que fur les huit ou neuf heures du matin, il vienne à pleuvoir, ce qui diminuera le poids de l'air, & qu'enfin fur le midi le Soleil n'échauffe l'air que médiocrement. Or en ce cas-ci & en d'autres diverfement combinés & qui feront pourtant des effets à peu près femblables, il arrivera que l'air du matin réfiftera plus au boulet que celui qui regnera vers le midi. Donc on a tort de propofer la queftion comme générale, & d'y répondre dans le même fens.

Un Canon porte-t-il plus loin lorfqu'on a tiré plufieurs coups que la premiere fois? les uns difent oui, & c'eft le plus grand nombre, d'autres au contraire difent non. Les uns & les autres ont tort, dès qu'ils n'y mettent aucune reftriction. Si à force de tirer, la lumiere s'évafe de façon que l'inflammation de la poudre dans la chambre puiffe s'échapper en partie de ce côté-là, fi l'ébranlement

l'ébranlement des parties du métal fait qu'il résiste moins à cette inflammation, si l'air extérieur devient plus chaud, &c. certainement la portée du boulet devient moins grande; mais si tout cela n'arrive point, ou s'il n'arrive que dans un degré très-médiocre, il est visible que la charge se dessechera plutôt lorsque la piece sera échauffée; que par conséquent son inflammation se fera plus promptement lorsqu'on y mettra le feu, & que le boulet partira avec plus de vitesse.

On a agité une question touchant les charges des Canons qui donnent les plus grandes portées. Bien des personnes ont pensé que la charge de 9 livres de poudre pour la piece de 24 de calibre étoit la plus convenable, & ce sentiment paroît s'accorder avec l'usage dans lequel Messieurs de l'Artillerie se sont mis depuis long-tems, de ne battre en breche qu'avec la charge de 8 livres pour la piece de 24, & quelquefois avec la charge de six livres quand la piece est échauffée. Mais Monsieur de Valiere Lieutenant Général des Armées du Roy & Directeur general des Ecoles d'Artillerie, dans son Mémoire sur les charges & les portées de bouches à feu, imprimé en 1740, & qui a été distribué dans les cinq Ecoles d'Artillerie, distingue trois cas. Le premier, lorsque l'objet à battre fait peu de résistance par la liaison de ses parties, comme la terre. Le second, quand le corps à détruire résiste autant ou plus par la liaison de ses parties que par la masse, comme la maçonnerie, & que sa distance n'excede pas celle de 300 toises. Enfin le troisiéme, lorsqu'il faut battre de plein foüet un objet éloigné, & y faire bréche. Son sentiment dans le premier cas, est qu'on a bien plus d'avantage en ne chargeant qu'à 6 livres, & même moins. Dans le second, qu'il faut tirer à la charge de 8 livres, & dans le troisiéme, qu'on fait quelquefois usage de la charge de 12. Au reste, je renvoye le Lecteur à cet excellent Mémoire, qui est vrayement digne d'être lû avec attention. Tout ce que je pourrois dire après un si grand Maître, n'auroit certainement pas la même force qu'on trouvera dans cet Ouvrage.



DE L'HYDRAULIQUE.

455. L'Hydraulique est la Science qui traite du mouvement des Fluides, & sur-tout du mouvement des Eaux.

456. PROPOSITION LXXVIII. *Si deux Vases* AB, ab, (Fig. 219.) *qu'on entretient toujours pleins d'eau, ont des ouvertures* C, *&* c *par où l'eau s'écoule, les vitesses des colonnes* CL, cl *qui s'écoulent dans des tems égaux, sont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs, c'est-à-dire des distances* CE, ce *des orifices à la surface supérieure de l'eau des vases.*

Supposons que les orifices C, *c* soient bouchés par des cloisons, les pressions que ces cloisons souffriront seront entr'elles comme les produits des grandeurs des cloisons par leurs distances à la surface supérieure de l'eau, & partant ces pressions seront exprimées par C×CE & *c*×*ce*; supposons aussi que les colonnes d'eau qui sortiront dans des tems égaux soient les cylindres CL, *cl*, ces cylindres étant entr'eux comme les produits de leurs bases par les hauteurs seront C×CL & *c*×*cl*; de plus leurs hauteurs CL, *cl* exprimeront les vitesses des colonnes d'eau qui sortiront dans des tems égaux par les deux orifices; car si l'une de ces hauteurs est plus longue que l'autre, il est clair que cela ne peut provenir que de ce que l'une des colonnes sort plus vîte que l'autre. Or les quantités de mouvement de ces deux colonnes étant le produit de leurs masses par leurs vitesses, sont exprimées par $C \times \overline{CL}^2$ & $c \times \overline{cl}^2$, & ces quantités de mouvement sont entr'elles comme les forces qui les produisent, c'est-à-dire comme les pressions $C \times CE$, $c \times ce$; donc nous avons $C \times \overline{CL}^2 . c \times \overline{cl}^2 :: C \times CE . c \times ce$, ou $\overline{CL}^2 . \overline{cl}^2 :: CE . ce$; donc $CL . cl :: \sqrt{CE} . \sqrt{ce}$, & partant les vitesses CL, *cl* des eaux qui s'écoulent par les orifices C, *c* sont entr'elles comme les racines des hauteurs CE, *ce*.

457. *Les colonnes d'eau qui s'écoulent dans des tems égaux par les orifices* C, c *en supposant toujours que les Vases soient entretenus pleins d'eau, sont en raison composée des orifices & de leurs vitesses.* Les quantités de mouvement de ces colonnes sonr $C \times \overline{CL}^2$ & $c \times \overline{cl}^2$, & leurs vitesses sont CL, *cl*; divisant donc ces quantités de mouvement par les vitesses, les quotiens $C \times CL$, $c \times cl$ seront les valeurs des colonnes qui sortent par les orifices. Or ces quotients sont les produits des orifices C, *c* par les vitesses CL, *cl*; donc, &c.

458. *Si les hauteurs* CE, ce *sont égales & les orifices inégaux, les colonnes d'eau qui sortiront dans des tems égaux, sont entr'elles comme les orifices* C, *c*. Les quantités de mouvement des colonnes qui sortent par les orifices sont $C \times \overline{CL}^2$, $c \times \overline{cl}^2$, & nous avons $\overline{CL}^2 . \overline{cl}^2$ :: CE. *ce*; donc en supposant CE $=$ *ce*, nous avons $\overline{CL}^2 = \overline{cl}^2$ & $CL = cl$; or les colonnes qui sortent par les orifices dans des tems égaux sont comme $C \times CL$ & $c \times cl$; donc à cause de $CL = cl$, ces colonnes sont entr'elles comme C est à *c*.

459. *Si les hauteurs* CE, ce *sont inégales, & les orifices* C, c *égaux, les colonnes d'eau qui sortent dans des tems égaux sont entr'elles comme les racines des hauteurs.* Leurs quantités de mouvement sont $C \times \overline{CL}^2$ & $c \times \overline{cl}^2$; divisant donc par les vitesses CL, *cl*, les quotients $C \times CL$ & $c \times cl$ seront les valeurs des colonnes qui sortent par les orifices. Or nous avons $C = c$; donc ces colonnes sont entr'elles comme CL, *cl*, c'est-à-dire comme leurs vitesses, mais les vitesses sont comme les racines quarrées des hauteurs CE, *ce*; donc, &c.

460. Si les hauteurs CE, *ce* sont égales & les orifices aussi, les colonnes d'eau qui sortent par les orifices sont égales, car ces colonnes sont entr'elles comme $C \times CL$, $c \times cl$, ou comme CL, *cl*, à cause de $C = c$; mais les vitesses CL, *cl* sont aussi égales, puisqu'elles sont comme les racines quarrées des hauteurs CE, *ce* que l'on suppose égales; donc les colonnes qui sortent par les orifices sont aussi égales.

461. *Si les hauteurs* CE, ce *sont inégales & les orifices aussi; & que cependant les colonnes d'eau qui sortent dans un même tems soient égales, les racines quarrées des hauteurs sont entr'elles réciproquement comme les orifices.* Car les colonnes d'eau sont $C \times CL$, & $c \times cl$;

or, par la suppofition nous avons $C \times CL = c \times cl$, donc $CL. cl :: c. C$, mais $CL. cl :: \sqrt{CE}. \sqrt{ce}$, donc $\sqrt{CE}. \sqrt{ce} :: c. C$.

462. Pour une plus grande intelligence de la Propofition fuivante, il faut fe rappeller que j'ai démontré (*N.* 116.) que fi deux ou plufieurs corps pefans d'inégales maffes, & même d'inégales natures, tombent librement vers le centre de la terre, ils parcourent dans des tems égaux des efpaces égaux ; les expériences de la machine du vuide que j'ai rapportées dans l'Airométrie confirment cette vérité ; & par conféquent fi cela ne fe trouve pas exactement vrai lorfque les corps defcendent vers le centre de la terre à travers de l'air, c'eft que l'air refifte davantage aux corps qui ont plus de furface à proportion de leur maffe. Or, de cette verité il fuit, 1°. Que fi deux corps qui ont commencé à defcendre vers le centre de la terre fe trouvent avoir parcouru des efpaces égaux, les tems qu'ils auront employé à defcendre feront égaux ; 2°. Que les viteffes acquifes à la fin de leurs efpaces feront auffi égales à caufe que les viteffes acquifes à la fin des efpaces font toujours entr'elles comme les tems ou comme les racines quarrées des efpaces.

Nous avons auffi démontré (*N.* 115.) que fi un corps après avoir defcendu librement vers le centre de la terre pendant un certain tems remonte dans une direction oppofée à celle de fa pefanteur avec la viteffe acquife à la fin de fa defcente, il s'élevera à la hauteur dont il eft defcendu dans un tems égal à celui qu'il a employé à defcendre. Or de-là il fuit, 1°. Que fi deux corps après avoir parcouru en defcendant des efpaces égaux, remontent avec leurs viteffes acquifes à la fin de ces efpaces, ils s'éleveront à des hauteurs égales dans un tems égal à celui qu'ils ont employé à defcendre. 2°. Que fi ces deux corps remontent à des hauteurs égales, les viteffes avec lefquelles ils remonteront feront égales, & les tems employés à remonter feront auffi égaux. Car ils ne remontent à ces hauteurs égales, que parce qu'ils ont des viteffes égales à celles qu'ils auroient acquifes en defcendant des mêmes hauteurs. Or, ces viteffes acquifes font égales, & les tems employés à les acquérir font auffi égaux, comme on vient de voir. Donc, &c. ceci pofé.

463. PROPOSITION LXXVIX. *Si l'on a foin de tenir toujours plein un Vafe* AB, (Fig. 220.) *dont l'eau fort par un orifice* C, *la viteffe avec laquelle cette eau fort eft égale à celle qu'un corps auroit acquife en tombant de la hauteur* EC *de la furface de l'eau.*

Si on met à l'orifice un tuyau CD, de façon que l'eau ne puisse sortir qu'avec une direction verticale & contraire à sa pesanteur; on sait par une longue expérience que l'eau qui sort s'éleve à une hauteur DF à peu de chose près égale à la hauteur CE de la surface de l'eau, & que cette petite différence dans les hauteurs ne vient que de ce que l'air resiste à l'eau, & l'empêche de s'élever autant qu'elle feroit; ce qu'on peut aisément éprouver dans la machine du vuide. Or, si un corps après être descendu librement de la hauteur EC remontoit avec sa vitesse acquise, il remonteroit à la hauteur DF égale à la hauteur EC; donc puisque l'eau & le corps remonteroient à des hauteurs égales, les vitesses avec lesquelles ils remonteroient, doivent être égales, de même que les tems qu'ils employeroient à remonter (par la Remarque précédente.)

464. *Quand l'eau qui coule d'un vase toujours plein est obligée de remonter, la hauteur à laquelle elle s'éleve, n'est que la moitié de la longueur qu'elle parcourreroit dans un tuyau* CH *horizontal dans un tems égal à celui qu'elle employe à remonter.*

Si un corps après être descendu de la hauteur EC remontoit avec sa vitesse acquise, & que sa pesanteur ne lui fit point obstacle, ce corps remonteroit à une hauteur double de la hauteur DF ou CE dans un tems égal à celui qu'il remonteroit; ainsi qu'il a été dit en parlant du Mouvement uniformément acceleré ou retardé; donc la même chose arriveroit aussi à l'eau qui remonte à la hauteur DF, si sa pesanteur ne lui faisoit obstacle; or, si à la place du tuyau CD on met un tuyau horizontal CH, la vitesse de l'eau au sortir de l'orifice ne trouvera point l'obstacle de la pesanteur dans ce tuyau, & comme cette vitesse est uniforme, puisqu'elle est produite par la même pression; il s'ensuit qu'elle fera parcourir à l'eau dans ce tuyau CH un espace double de la hauteur DF dans un tems égal à celui que l'eau employeroit à s'élever à cette hauteur.

465. On m'objectera peut-être que si cela est ainsi que je viens de le dire, il s'ensuivra que lorsque l'eau est obligée de s'élever perpendiculairement, il ne devroit sortir par l'orifice C que la moitié de l'eau qu'il en sortiroit dans le même tems, si le tuyau étoit horizontal, ce qui est impossible, puisque la pression à l'orifice C étant toujours la même, il doit en sortir d'égales quantités d'eau; mais il faut prendre garde que lorsque l'eau est obligée de de remonter, & qu'elle perd de sa vitesse, le jet se gonfle peu à

peu, de façon qu'il prend la forme d'un cône tronqué renversé, au lieu que quand le tuyau est horizontal l'épaisseur de la colonne d'eau qui sort est la même partout, & par conséquent il se fait une compensation, & ce que l'une des colonnes gagne en longueur, l'autre le gagne par les augmentations de son épaisseur.

466. C'est par une raison contraire à celle-ci que lorsque l'eau qui coule de l'orifice C tombe perpendiculairement vers le centre de la terre, elle est beaucoup plus épaisse à la sortie de l'orifice que lorsqu'elle en est plus éloignée, & qu'à un grand éloignement elle doit se resoudre en goutes; car les parties d'eau qui sortent successivement de l'orifice ont la même vitesse, puisque la pression subsiste toujours la même à cause qu'on a soin d'entretenir le vase toujours plein. Supposons donc pour un moment que ces parties d'eau en tombant successivement n'ayent aucune vitesse & passent du repos au mouvement, & qu'après un certain tems on fixe tout d'un coup leur mouvement. Les tems de la descente des parties qui seront sorties plutôt de l'orifice seront plus longs que les tems de la descente des parties qui seront sorties plus tard, & comme les mouvemens de toutes ces parties seront accelerés par leurs pesanteurs, les espaces parcourus seront entr'eux comme les quarrés des tems, & par conséquent les différences de ces espaces iront en diminuant à mesure qu'ils s'approcheront de l'orifice, de même que les différences des quarrés vont en diminuant à mesure que ces quarrés diminuent; ainsi les parties d'eau plus proches de l'orifice seront plus proches entr'elles que celles qui en seront plus éloignées. Donc, &c.

467. PROPOSITION LXXX. *Si l'on entretient un vase* AB (Fig. 221.) *toujours plein, & que le long de la hauteur* BH *de ce vase il y ait plusieurs orifices égaux* C, D, E, F, &c. *par lesquels l'eau s'écoule, les quantités d'eau qui sortiront dans un même tems par ces orifices seront entr'elles comme les ordonnées d'une parabole* HMB, *dont le diamètre seroit la hauteur* HB.

A cause de l'égalité des orifices, les quantités d'eau qui coulent par ces orifices dans des tems égaux, sont entr'elles comme les racines des hauteurs HF, HE, HD, HC; or, les ordonnées de la parabole sont entr'elles aussi comme les racines de leurs abscisses qui sont ces hauteurs. Donc, &c.

468. *Si au lieu des orifices faits le long de la hauteur* HB *du vase, on fait une fente égale à cette hauteur, & qui soit partout d'égale largeur, l'eau qui coulera de cette fente pendant un certain tems ne sera*

que les deux tiers de l'eau qui en couleroit pendant le même-tems, si toutes les parties de l'eau couloient avec la vitesse exprimée par la racine quarrée de la plus grande hauteur.

Concevons que l'eau contenue dans le vase soit partagée en une infinité de couches horizontales dont l'épaisseur soit infiniment petite; les parties d'eau qui couleront dans un même tems de chacune, seront comme les racines quarrées des distances de ces couches à la surface supérieure de l'eau, & par conséquent elles seront entr'elles comme les ordonnées infiniment proches, ou comme les élemens de la parabole ; ainsi leur somme sera à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 2 à 3, c'est-à-dire comme la somme des élemens de la parabole HMB est au dernier & plus grand élement BM multiplié par le nombre des termes ou la hauteur BH, & par conséquent comme la parabole est au rectangle circonscrit BV ; mais de toutes les parties d'eau qui s'écoulent dans un même tems par la fente HB, la plus grande est celle qui s'écoule par l'extrêmité B de cette fente, puisque c'est celle qui sort avec la plus grande vitesse ; donc la somme des parties d'eau qui s'écoulent dans un même tems est à celle qui s'écoule par l'extrêmité B, multipliée par la hauteur HB, comme 2 est à 3. Mais multiplier la plus basse eau qui sort par la hauteur HB, c'est la même chose que de supposer que toutes les autres parties d'eau qui sortent des différentes couches d'eau sont égales à celle-ci ; donc les différentes parties d'eau qui sortent de chaque couche chacune avec sa vitesse particuliere, ne sont que les deux tiers des différentes parties d'eau qui sortiroient toutes de chaque couche avec la vitesse de la plus basse.

469. *Si l'on prend deux vases prismatiques* AB, ab (Fig. 222.) *de même hauteur, & dont le second* ab *ait la largeur* mb *de sa base égale à sa hauteur. Je dis que si l'on fait sur l'un des côtés du premier vase* AB, *une fente verticale* HC, *& sur la longueur* mb *de la base du second, une fente horizontale* fb *de même largeur que la verticale, & que les deux vases soient toujours entretenus plein d'eau, l'eau qui sortira par la fente verticale* HC *dans un certain tems sera à l'eau qui sortira par la fente horizontale* fb *dans le même tems, comme 2 est à 3.*

Les deux fentes ayant la même longueur & la même largeur, les quantités d'eau qui se presenteront pour sortir de l'une & de l'autre seront égales ; mais toutes les parties de la quantité d'eau

qui se presente pour sortir de la fente verticale, sont entr'elles comme leurs vitesses inégales, c'est-à-dire comme les racines des hauteurs ou de leurs distances à la surface supérieure de l'eau, ou comme les ordonnées d'une parabole, dont les abscisses sont les mêmes hauteurs, & au contraire toutes les parties d'eau qui sortent par la fente horizontale sont égales & peuvent être exprimées chacune par la racine de la hauteur HC ; ainsi toutes les parties d'eau qui sortent par la fente horizontale dans un certain tems seroient égales à toutes les parties d'eau qui sortiroient dans le même tems par la fente verticale, si elles avoient toutes la vitesse exprimée par $\sqrt{HC}$. Or, nous venons de voir (*N.* 468.) que les parties d'eau qui sortent dans le même tems par la fente verticale HC, chacune avec sa vitesse particuliere sont aux quantités d'eau qui sortiroient avec la vitesse commune $\sqrt{HC}$ comme 2 à 3. Donc elles sont aussi à celles qui sortent par la fente horizontale comme 2 à 3.

470. Lorsque les parties d'eau qui sortent par une fente verticale BH (*Fig.* 221.) sont entr'elles comme les élemens d'une parabole ; il se trouve toujours une de leurs vitesses, laquelle étant multipliée par le nombre qui en exprime la multitude ou par la hauteur BH, donne un produit égal à la somme des vitesses, & c'est ce qu'on nomme *Vitesse moyenne ;* de façon que si toutes les parties de l'eau qui sort par la fente sortoit avec cette vitesse moyenne, la quantité d'eau qui sortiroit pendant un certain tems, seroit égale à celle qui en sortiroit dans un tems égal en supposant que chaque partie d'eau conservât sa vitesse particuliere.

471. Or, pour trouver cette vitesse moyenne il n'y a qu'à prendre les deux tiers de la plus grande vitesse $\sqrt{HB}$, car la somme des vitesses ou ce qui est la même chose la somme des élemens de la parabole est les $\frac{2}{3}$ du rectangle circonscrit, & par conséquent cette somme est $\frac{2}{3}BM \times BH$, mais la vitesse BM est exprimée par $\sqrt{HB}$, donc la somme est $\frac{2}{3}\sqrt{HB} \times BH$.

472. PROBLEME. *Trouver la quantité d'eau qui sort dans un certain tems de l'orifice* C *d'un vase* AB (Fig. 220.) *que l'on entretient toujours plein.*

L'expérience nous apprend qu'un corps qui passant du repos au mouvement descend librement vers le centre de la terre parcourt environ 15 pieds dans une seconde, & nous sçavons aussi qu'un corps avec la vitesse acquise par sa chûte peut parcourir un espace double de l'espace parcouru par sa chûte dans un tems égal

égal à celui de sa chûte. Si nous supposons donc que la distance de l'orifice C à la surface supérieure de l'eau soit de 15 pieds, l'eau qui sort de l'orifice aura la même vitesse qu'auroit acquise un corps en tombant de cette hauteur, & comme cette vitesse sera uniforme à cause que la pression est toujours la même, cette eau parcourera dans le tuyau CH un espace de 30 pieds dans une seconde, & par conséquent cet espace exprimera sa vitesse uniforme, & en même tems la quantité d'eau qui sortira dans une seconde, laquelle ne sera autre chose que le produit de la largeur de l'orifice par l'espace CH parcouru dans cette seconde. Ainsi si l'on demande combien il en sortira dans une minute ou 60 secondes; on dira par Regle de Trois : si dans une seconde il sort une colonne d'eau qui a pour base la grandeur de l'orifice, & pour longueur 30 pieds, combien en sortira-t-il dans 60 secondes, & l'on trouvera qu'il en sortira 60 colonnes égales à la premiere.

Si la hauteur CE est plus ou moins grande que 15 pieds, & qu'elle soit, par exemple, de 6 pieds, il sera toujours vrai de dire qu'il sortira de l'orifice une colonne de 12 pieds de longueur dans un tems égal à celui qu'un corps auroit employé à descendre de cette hauteur, mais le temps sera moindre qu'une seconde; & pour le trouver on observera que les tems des hauteurs parcourues par la chûte d'un corps à commencer toujours depuis le commencement de la chûte, sont entr'eux comme les racines quarrées des hauteurs; c'est pourquoi on dira par Regle de Trois : la racine quarrée de la hauteur 15, est à la racine quarrée de la hauteur 6, comme le tems une seconde employé à descendre de la hauteur 15 est à un quatriéme terme qui sera le tems employé à descendre de la hauteur 6. Ainsi on aura $\sqrt{15}.\sqrt{6}::1.\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$, & ce quatriéme terme $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$ ou $\sqrt{\frac{6}{15}}$ ou $\sqrt{\frac{2}{5}}$ sera le tems employé à descendre de la hauteur 6. Après quoi on fera une autre Régle de Trois, en disant : si pendant le tems $\sqrt{\frac{2}{5}}$ l'eau avec la vitesse égale à celle qu'un corps auroit acquise en tombant de la hauteur 6 parcourt 12 pieds ; combien percourera-t-il dans le tems 1 seconde; c'est-à-dire qu'en nommant x le quatriéme terme de cette proportion, on aura $\sqrt{\frac{2}{5}}.12::1.x$, & élevant tous les termes aux quarrés on aura $\frac{2}{5}.144.1.xx$, ce qui donne $\frac{2}{5}xx=144$, d'où l'on tire $xx=\frac{720}{2}=360$, donc $x=18$ pieds & un peu plus ;

ainsi l'eau qui s'écoulera dans une seconde sera une colonne de 18 pieds de longueur & un peu plus.

473. Si l'on prend donc sur un diamétre indefini AC une grandeur de 15 pieds de A en B (*Fig.* 223.), & qu'après avoir élevé en B une perpendiculaire BH qu'on fera double de AB, on décrive avec le diamétre AB, & l'ordonnée BH une parabole AHL indefinie; on trouvera les longueurs des colonnes qui peuvent sortir de l'orifice d'un vase AL entretenu toujours plein à quelque distance que cet orifice soit de la surface supérieure de l'eau; car si, par exemple, l'orifice est en T, on menera de ce point T l'ordonnée TS, & mesurant cette ordonnée elle sera la longueur ou la vitesse de l'eau qui sortira de l'orifice T dans une seconde, & ainsi des autres, ce qui est d'une extrême commodité sur-tout lorsqu'on fait une échelle sur le papier.

474. PROBLEME. *Ayant un vase qu'on entretient toujours plein d'eau qui s'écoule par une fente* AC *verticale* (Fig. 223.), *trouver le point de la hauteur auquel répond la vitesse moyenne.*

Je décris ma parabole, comme il vient d'être dit (*N.* 473.), & supposant que la droite AC soit la hauteur verticale ou le diamétre; je mene du point C l'ordonnée CL qui marque la plus grande vitesse. Et pour trouver la vitesse moyenne, j'en prens les deux tiers de C en V, & du point V élevant la perpendiculaire VM qui coupe la parabole en M; je mene du point M l'ordonnée MP, laquelle est la vitesse moyenne, puisqu'elle est égale à CV $=\frac{2}{3}$ CL (*N.* 470.), ainsi le point P est le point cherché.

Si l'on pratiquoit donc en P un orifice ou une fente horizontale de la même grandeur que la verticale, l'eau qui s'écouleroit pendant un certain tems de cet orifice ou de cette fente seroit égale à l'eau qui s'écouleroit dans le même tems de la fente verticale.

475. Quand on veut mettre en pratique tout ce que nous venons de dire, & ce que nous dirons dans la suite, il se trouve du déchet, c'est-à-dire toujours un peu moins que les calculs ne donnent; & cela vient de ce que dans nos Régles & nos Calculs, nous faisons abstraction du frottement de l'eau contre les parois du vase, & contre le contour des orifices, lequel frottement doit diminuer un peu la vitesse de l'eau; or, comme ces sortes de déchets ne peuvent mieux être estimés que par la pratique & l'expérience; nous laissons le soin à ceux qui travaillent d'examiner de quelle façon ils doivent y avoir égard. Générale-

ment parlant la Géométrie considérant les surfaces des corps comme parfaitement planes, & les corps comme parfaitement homogenes dans toutes les parties, fait abstraction des irrégularités qui se trouvent dans ces sujets, & comme les effets de ces sortes d'irrégularités qui nous sont souvent insensibles, ne peuvent se discerner que par l'expérience ; ceux qui s'adonnent à la pratique doivent y avoir recours, & prendre garde cependant de ne pas établir trop vite des regles générales; qu'on ait trouvé, par exemple, qu'une surface de tant de base & de hauteur a donné un certain déchet, il ne s'ensuivra pas toujours qu'une surface double de celle-là doive donner un double déchet; il faudroit pour que cela fût, que l'irrégularité des parties de l'une des surfaces fût la même que l'irrégularité des parties de l'autre, ce qui ne se trouve presque jamais, tout varie dans la nature, & l'on raisonneroit fort mal sur ses effets si l'on croyoit pouvoir en parler avec la derniere précision. A la bonne heure qu'on aille par dès à peu près; mais de dire qu'en conséquence de quelques expériences on puisse tirer des Régles précises & Géométriques, c'est se tromper soi-même & en imposer aux Lecteurs. Il arrive même de-là qu'on fait par trop d'entêtement des fautes considérables, dans lesquelles on ne tomberoit pas si on étoit accoutumé à avoir l'esprit moins systématique ; les régles de la Nature vont leur train, tandis qu'un systême va aussi le sien; & au bout du compte l'un & l'autre se trouvent étrangement éloignés.

476. PROPOSITION LXXXI. *Si un vase prismatique* AB (*Fig.* 224.) *plein d'eau, se desemplit par un orifice* E. *Le mouvement de l'eau qui coule par cet orifice est un mouvement uniformément retardé.*

Concevons que le vase soit coupé par des plans paralelles à la base, dont les hauteurs CH, CI, CL, CA soient comme les quarrés 1. 4. 9. 16, &c. des nombres naturels 1. 2. 3. 4, &c. quand l'eau commencera à couler sa vitesse étant comme la racine de la hauteur $CA = 16$, sera 4; & quand le niveau de l'eau sera descendu jusqu'en L*l*, sa vitesse sera comme $\sqrt{CL} = \sqrt{9}$, ou comme 3, & quand le niveau sera en I*i* sa vitesse sera comme $\sqrt{CI} = \sqrt{4}$, ou comme 2, & ainsi de suite; or, les cylindres CD, C*l*, C*i*, C*h* étant entr'eux comme leurs hauteurs à cause de la base commune, sont par conséquent comme les nombres 16. 9. 4. 1, & leurs différences, c'est-à-dire les cylindres d'eau LD, I*l*, H*i*, C*h* sont comme les nombres 7. 5. 3. 1; donc à mesure

que l'eau en descendant parcourera les cylindres LD, I*l*, H*i*, C*h*, elle perdra des degrés égaux de vitesse, & par conséquent il arrivera à l'eau, ce qui arrive à un corps, qui en remontant avec un certain degré de vitesse acquise, perd des degrés égaux de vitesse à mesure qu'il parcourt des espaces qui sont entr'eux comme les nombres impairs pris en retrogradant. Or, le mouvement de ce corps est uniformément retardé. Donc le mouvement de l'eau d'un vase qui se desemplit est aussi uniformément retardé.

477. *Remarque*. Il faut observer que si l'orifice étoit dans le fond du vase, il faudroit qu'il fût beaucoup moindre que le fond. Car si l'orifice étoit égal au fond du vase l'eau tomberoit tout d'une piece, de façon que les parties inférieures & les supérieures auroient la même vitesse, & par conséquent cette masse d'eau suivroit la loi ordinaire des corps pesans, & parcoureroit dans des tems égaux des espaces qui seroient entr'eux comme les nombres impairs 1. 3. 5. 7, &c. & si l'ouverture quoique moindre que le fond étoit un peu trop grande, la colonne d'eau qui seroit au-dessus de cette ouverture étant d'un poids considérable s'affaiseroit trop vite & formeroit un espece d'entonnoir.

478. Corollaire. *Si l'on laisse desemplir un vase plein d'eau par un orifice* E. *La quantité d'eau qui en sera sortie ne sera que la moitié de la quantité d'eau qui en sortiroit dans le même tems si l'on entretenoit le vase toujours plein d'eau.*

Quand le vase se desemplit, la vitesse $\sqrt{AC}$ avec laquelle l'eau commence à couler diminue à chaque instant, & au contraire quand on entretient le vase toujours plein la vitesse $\sqrt{AC}$ avec laquelle l'eau commence à couler, reste toujours la même, & par conséquent elle est uniforme; or, selon les régles du mouvement uniformément retardé, une vitesse qui diminue à chaque instant fait parcourir un espace qui n'est que la moitié de celui qu'elle fait parcourir dans le même tems lorsqu'elle est uniforme; Donc la quantité d'eau qui sort lorsque le vase se desemplit ne parcourt que la moitié de l'espace de la quantité d'eau qui sortiroit dans le même tems si le vase étoit entretenu toujours plein, c'est-à-dire, que si on adaptoit un long tuyau à l'orifice, la colonne d'eau qui se trouveroit dans ce tuyau quand le vase se seroit desempli n'auroit que la moitié de la longueur de la colonne d'eau qui s'y trouveroit, si le vase toujours plein avoit coulé pendant tout le tems qu'il a fallu pour se desemplir, & par conséquent la premiere quantité d'eau ne seroit que la moitié de la seconde.

479. COROLLAIRE II. De-là il eſt aiſé de trouver dans combien de tems toute l'eau d'un vaſe s'écoule lorſque le vaſe ſe déſemplit ; car il n'y a qu'à chercher combien d'eau il ſortiroit de l'orifice pendant une ſeconde ſi le vaſe reſtoit toujours plein (*N*.472.), chercher auſſi la quantité d'eau que le vaſe contient, doubler cette quantité, & dire enſuite par Regle de Trois : ſi une telle quantité s'écoule dans une ſeconde quand le vaſe eſt toujours plein, le double de la quantité d'eau que le vaſe contient, pendant combien de tems s'écoulera-t-elle le vaſe reſtant toujours plein ? & le tems que l'on trouvera ſera celui pendant lequel le vaſe doit ſe deſemplir ; car quand le vaſe ſe deſemplit il ne ſort comme on a vû ci-deſſus, que la moitié de la quantité d'eau qui ſortiroit dans le même tems ſi le vaſe étoit toujours entretenu à même hauteur.

Nommant donc a la baſe ; h la hauteur du vaſe ; b la grandeur de l'orifice ; m la longueur de la colonne d'eau qui ſortiroit dans une ſeconde ſi le vaſe étoit toujours plein, & x le tems qu'on cherche. La quantité d'eau que le vaſe contient ſera ah, & le double de cette quantité $2ah$, la colonne d'eau qui ſortiroit dans une ſeconde ſera bm ; ainſi l'on aura $bm.\ 1.\ 2ah.\ x$, ce qui donne $x = \frac{2ah}{bm}$.

Soit $a = 10$ pouces quarrés, $h = 15$ pieds, $b = 2$ pouces quarrés, & $m = 30$ pieds, nous aurons $x = \frac{2 \times 10 \times 15}{2 \times 30} = \frac{20 \times 15}{60} = \frac{300}{60} = 5$ ſecondes ; ainſi le vaſe ſe deſemplira en 5 ſecondes, & ainſi des autres.

480. COROLLAIRE III. *Si deux vaſes* AB, *ab* (Fig. 225.) *pleins d'eau ſe deſempliſſent par des orifices* E, e, *les tems des écoulemens ſont entr'eux en raiſon compoſée de la raiſon directe des baſes, de la raiſon directe des hauteurs, de la raiſon inverſe des orifices, & de la raiſon inverſe des longueurs des colonnes d'eau qui ſortiroient dans une ſeconde ſi les vaſes étoient toujours pleins.* Car nommant A, a les baſes ; H, h, les hauteurs, B, b ; les orifices, M, m ; les longueurs des colonnes qui ſortiroient dans une ſeconde les vaſes étant toujours pleins ; & X, x, les tems qu'il faut aux vaſes pour ſe deſemplir ; nous aurons $X = \frac{2AH}{BM}$ pour le tems qu'il faut au premier vaſe pour ſe déſemplir (*N*. 478.), & $x = \frac{2ah}{bm}$, pour le tems qu'il faut

au ſecond vaſe, & partant X. x :: $\frac{2AH}{BM}$. $\frac{2ah}{bm}$ :: $\frac{AH}{BM}$. $\frac{ah}{bm}$, & multipliant les termes de la derniere raiſon par BM, & bm, nous aurons X. x :: AH×bm. ah×BM; or, la raiſon AH×bm. ah×BM, eſt compoſée des raiſons A, a; H, h; b, B; & m. M. Donc, &c.

Si l'on fait A$=a$ on aura X. x :: H×bm. h×BM, c'eſt-à-dire ſi les baſes des deux vaſes ſont égales, les tems des écoulemens ſont entr'eux en raiſon compoſée de la raiſon directe des hauteurs H, h, de la raiſon inverſe b, B des orifices, & de la raiſon inverſe m, M des longueurs.

Si l'on fait A$=a$ & H$=h$, on aura X. x :: bm. BM, c'eſt-à-dire les baſes des vaſes étant égales, & les hauteurs auſſi, les tems des écoulemens ſont en raiſon compoſée de la raiſon inverſe b, B des orifices, & de la raiſon inverſe des longueurs m, M; mais il faut prendre garde qu'en ce cas on aura toujours M$=m$, à cauſe des hauteurs égales H, h, ainſi l'on aura X. x :: b. B, c'eſt-à-dire les baſes & les hauteurs étant égales les tems ſont entr'eux en raiſon inverſe des orifices.

Si l'on fait H$=h$, & par conſéquent M$=m$; on aura X. x: A×b. a×B, c'eſt-à-dire les hauteurs étant égales les tems des écoulemens ſont entr'eux en raiſon compoſée de la directe des baſes, & de l'inverſe des orifices.

Si l'on ſuppoſe H$=h$, & B$=b$, ce qui donne M$=m$, on aura X. x :: A. a, c'eſt-à-dire les hauteurs & les orifices étant égaux, les tems des écoulemens ſont entr'eux dans la raiſon des baſes.

481. PROBLEME. *Connoiſſant le tems pendant lequel un vaſe ſe déſemplit, connoître les quantités d'eau qui en ſortent à chaque partie de ce tems.*

Suppoſons que le vaſe DC (*Fig.* 224.) ſe deſempliſſe dans 4 ſecondes, je diviſe ſa hauteur en quatre parties, enſorte que les hauteurs CH, CI, CL, CM ſoient entr'elles commes les quarrés 1. 4. 9. 16 des nombres 1. 2. 3. 4, & concevant que l'eau du vaſe, ſoit coupée par des paralelles à la baſe qui paſſent par les points de diviſion, les cylindres d'eau DC, lC, iC, hC ſeront entr'eux comme les quarrés 16. 9. 4. 1, & leurs différences, c'eſt-à-dire les cylindres DL, lI, iH, hC ſeront comme les nombres impairs 7. 5. 3. 1, & exprimeront les quantités d'eau qui ſortiront dans chacune des quatre ſecondes. Car la viteſſe avec laquelle l'eau commence à couler étant uniformément retardée

pendant son mouvement, il est clair que les espaces que l'eau parcourt pendant les quatre tems égaux qui composent la durée de son mouvement doivent être entr'eux comme les nombres 7. 5. 3 & 1.

Des Machines Hydrauliques.

482. Les Machines Hydrauliques sont des Machines qui ont été imaginées pour élever l'eau dans les endroits où on ne sçauroit en trouver naturellement.

L'eau étant du nombre des corps pesans ne s'éleve jamais au-dessus de son origine; mais si après avoir descendu pendant un certain tems, elle trouve un obstacle qui l'empêche de descendre plus bas & de s'étendre horizontalement de côté & d'autre, sa vitesse acquise la fait remonter à une hauteur égale à celle dont elle est descendue dans un tems égal à celui qu'elle a employé à descendre.

Pour faire remonter l'eau par le moyen de sa vitesse acquise, on la fait couler depuis la source A, (*Fig.* 226.) par un tuyau AB cylindrique ou prismatique, perpendiculaire ou incliné à l'horizon, après quoi on recourbe le tuyau de façon que l'eau ne puisse sortir par l'ouverture D qu'avec une direction verticale ou inclinée à l'horizon, & c'est ce qu'on nomme des *Jets* d'eaux. Que si entre le lieu M, (*Fig.* 227.) auquel on veut l'élever & sa source A, il se trouve un vallon ABC, on fait descendre le tuyau AB jusqu'au fond du vallon, après quoi on le recourbe jusqu'en C, ou on en adapte un autre CM par le moyen duquel l'eau remonte en M, supposé que M ne soit pas plus haut que A.

Il faut prendre garde que dans ces sortes de conduits, de même que dans les Jets, l'eau ne remonte pas tout-à-fait aussi haut qu'elle est descendue, ce qui provient du frottement de l'eau contre les parois des tuyaux & de la résistance de l'air qui diminuent la vitesse avec laquelle l'eau remonteroit sans ces obstacles.

Quelques polies que nous paroissent les surfaces intérieures des tuyaux dont on se sert pour conduire les eaux, elles ont cependant des irrégularités & des petites éminences ensemble, qui comme autant de petits plans inclinés rallentissent le mouvement de l'eau; car on sçait que les corps pesans descendent moins vîte le long des plans inclinés que s'ils descendoient par une direction verticale. Ainsi quand l'eau est parvenue jusqu'au bas du tuyau, sa vitesse acquise n'est pas aussi grande qu'elle l'au-

roir été ſi elle n'avoit pas rencontré ces petits plans, & par conſéquent on ne doit pas s'étonner ſi elle n'eſt pas capable d'élever l'eau à la hauteur, dont elle eſt deſcendue. De plus, lorſque l'eau vient à remonter, l'air à travers lequel elle paſſe s'oppoſe à ſon paſſage & diminue encore ſon mouvement. Or, pour pouvoir juger exactement & géométriquement de combien la viteſſe de l'eau eſt rallentie, il faudroit pouvoir découvrir quelle eſt la diminution de viteſſe cauſée par les petites éminences des ſurfaces intérieures des tuyaux, & celle que cauſe la réſiſtance de l'air, ce qui me paroît bien difficile, ou pour mieux dire impoſſible pour bien des raiſons, quand même on appelleroit l'expérience à ſon ſecours. 1°. La Géométrie ne tire des conſéquences certaines qu'autant qu'elle connoît les rapports des ſurfaces, des plans de leurs dimenſions & des angles qu'elles forment; or, tout cela ne ſe peut connoître dans ces petites irrégularités qui ſe trouvent dans les ſurfaces intérieures des tuyaux; ces irrégularités ſont differentes par leurs figures, & ne ſont pas partout en même nombre, car toutes les parties des tuyaux ne ſçauroient être homogenes, l'eau en paſſant par deſſus les émouſſe, l'expérience qu'on aura faite aujourd'hui ne répondra par conſéquent pas à celle qu'on fera demain, les Machines un peu vieilles ont beaucoup moins de frottement que les neuves; d'ailleurs, l'expérience faite à l'égard d'une certaine ſurface ne peut ſervir de regle pour une autre ſurface plus ou moins grande, qu'autant qu'on voudroit ſuppoſer que les irrégularités ſeroient de même nature partout, ce qui eſt faux; 2°. L'air réſiſte plus ou moins ſelon les differentes altérations qu'il peut ſouffrir, & dont nous avons déja parlé plus haut, les pertes que ſouffre la viteſſe de l'eau ne ſont donc pas toujours les mêmes. Mais ſuppoſons que par le moyen d'un Barometre, d'un Thermometre, d'un Hygrometre, &c. on puiſſe venir à bout de déterminer exactement les effets de l'air ſelon les circonſtances, il reſtera encore à ſçavoir quelle eſt la réſiſtance de l'air au premier inſtant où l'eau commence à s'élever. Il eſt démontré qu'à la fin des tems 1. 2. 3. 4. &c. les réſiſtances ſont entr'elles comme les quarrés des viteſſes reſtantes; pour trouver donc la ſomme des réſiſtances à la fin d'un tems déterminé compoſé de petits tems égaux, il faut néceſſairement connoître la premiere, & comment pouvoir y parvenir; eſt-il facile de fermer un tuyau préciſément à la fin d'un certain tems, de façon qu'il n'en ſorte ni plus ni moins d'eau

qu'il n'en faut? ſuppoſé même qu'on en vienne à bout, peut-on démêler dans la diminution d'eau qu'on trouvera à la fin de cet inſtant quelle eſt la partie de cette diminution qui a été cauſée par le frottement, & celle qui a été cauſée par la réſiſtance; & quand on pourroit le trouver dans un certain cas particulier, ce qui eſt bien difficile, pourroit-on en tirer quelques conſéquences pour le général? ces conſiderations & grand nombre d'autres que j'y pourrois ajouter, font voir quel fond l'on peut faire ſur les regles que quelques Auteurs ont voulu nous donner touchant les frottemens & la réſiſtance de l'air. Les calculs ſur leſquels ils ont voulu appuyer ces regles, ſeront toujours admirables & certains, dès qu'on accordera les ſuppoſitions qu'ils ont faites; mais comme rien n'eſt fixe dans la Nature, & que la combinaiſon des choſes varie d'un inſtant à l'autre, la ſuppoſition faite dans le fond d'un cabinet n'eſt preſque jamais d'accord avec ce qui ſe paſſe réellement; le calcul tombe, & le calculateur en eſt pour les frais d'avoir calculé.

Les Machines Hydrauliques que l'on employe pour élever l'eau au-deſſus de ſa ſource, ſont de deux ſortes; les unes élevent l'eau renfermée dans un vaſe de la même façon qu'on éleve un poids. C'eſt ainſi qu'on ſe ſert des ſeaux pour tirer de l'eau d'un puits à la faveur d'une poulie, qu'on attache des ſeaux à la circonférence d'une grande roue dont une partie eſt plongée dans l'eau, afin que les ſeaux ſe trouvant au bas de la roue ſe rempliſſent, & que lorſqu'ils ſont en haut ils puiſſent ſe vuider dans un canal, &c. Le calcul de ces Machines ſe fait de la même façon que ſi on leur attachoit un poids égal à celui de l'eau qu'elles élevent, & par conſéquent je n'en parlerai pas après ce que j'en ai dit ci-deſſus touchant ces ſortes de Machines. Celles de la ſeconde eſpece élevent l'eau par le moyen de l'air, & ſont beaucoup plus ingénieuſes que les précedentes; les Anciens s'en ſervoient de même que nous, mais comme ils n'avoient aucune connoiſſance de la peſanteur de l'air & de ſon reſſort, tout ce qu'ils ont écrit là-deſſus n'a rien de ſatisfaiſant, & leurs Machines étoient bien éloignées de la perfection de celles qu'on fait aujourd'hui. Je vais en rapporter quelques-unes des plus ſimples; la connoiſſance de celles-ci fera aiſément juger de ce qu'on doit penſer des autres qui n'en ſont que des differentes combinaiſons.

DU SIPHON.

483. Le Siphon eſt un Inſtrument dont on ſe ſert pour faire ſortir la liqueur d'un vaſe par le haut ſans toucher au vaſe ; on en fait de pluſieurs façons, mais ordinairement c'eſt un tuyau ABC, (*Fig.* 228.) dont l'une des branches AB eſt plus grande que l'autre BC. Quand on veut s'en ſervir, on plonge la branche BC dans la liqueur du vaſe MN qu'on veut vuider, on applique la bouche à l'extrêmité A de l'autre branche AB, & l'on aſpire juſqu'à ce que la liqueur vienne mouiller les lévres; alors on ſe retire, & la liqueur du vaſe coule par l'ouverture A.

La raiſon de ceci, eſt qu'en aſpirant on étend la capacité de la poitrine, de ſorte qu'une partie de l'air qui étoit dans le Siphon venant à paſſer dans les poulmons, ce qui reſte étant plus dilaté a moins de reſſort & de force que la colonne d'air qui peſe ſur la ſurface de la liqueur contenue dans le vaſe. Ainſi cette colonne fait monter l'eau, laquelle étant parvenue en B deſcend par ſon propre poids le long de la branche BA, ce qui continue juſqu'à ce que la liqueur contenue dans le vaſe ſe trouve au-deſſous de l'orifice C de l'autre branche BC.

On dira peut-être que la colonne d'air qui répond à l'ouverture A étant en équilibre avec celle qui peſe ſur la ſurface de la liqueur contenue dans le vaſe doit empêcher l'eau qui eſt dans la branche AB de couler; mais il faut obſerver que la branche AB étant toujours plus longue que la branche BC contient une plus grande quantité d'eau que la branche BC, & que par conſéquent la colonne d'air qui répond à l'ouverture A ayant une plus grande quantité d'eau à ſoutenir que la colonne d'air qui fait remonter l'eau par l'autre ouverture, ſe trouve plus foible & doit laiſſer le paſſage libre à l'eau.

Il faut prendre garde que ſi dans la branche BC la partie BE qui ſe trouve au-deſſus du niveau de l'eau contenue dans le vaſe n'étoit pas moindre de 32 pieds, l'eau ne couleroit jamais par l'autre branche; car ſuppoſé même qu'on pût en aſpirant tirer tout l'air qui eſt dans le Siphon, la colonne d'air qui eſt au-deſſus de la ſurface du vaſe ne pourroit élever l'eau qu'à 32 pieds de hauteur; or, il reſte toujours de l'air dans le Siphon, & cet air, quoique dilaté, a toujours une certaine force qui s'oppoſe à l'action de la colonne extérieure; donc, cette colonne extérieure

ne peut élever l'eau jusqu'à 32 pieds. Ainsi l'ancien Méchanicien *Heron* avoit tort de dire qu'avec un seul Siphon, il feroit passer l'eau au-dessus de la plus haute montagne.

484. On peut se servir du Siphon sans être obligé d'aspirer, ce qui se fait de differentes façons, ainsi qu'on va voir.

J'adapte un Siphon au côté MS d'un vase MN, (*Fig*. 229.) de façon que la petite branche BC soit dans le vase, la plus grande AB en dehors, & que le sommet B soit moins haut que le sommet M du vase; je verse de l'eau dans le vase, & tant que cette eau ne montera pas jusqu'en B, elle entrera dans la branche BC, & se mettra en équilibre ou de niveau avec l'eau contenue dans le reste du vase, & par conséquent elle ne descendra point par la branche BA; mais dès-lors que l'eau du vase sera à une hauteur plus grande que BS, elle passera par la branche BC, & forcée par le poids de celle qui restera dans le vase, elle commencera à couler par la branche BA, & ne cessera de couler que lorsque l'eau du vase se trouvera plus basse que l'ouverture C de la branche BC. La raison en est, que si l'eau qui aura passé dans la branche BA pouvoit s'écouler par A & se séparer de celle qui est dans la branche BC, il se trouveroit entre ces deux eaux un air qui se dilateroit de plus en plus à mesure que l'eau de la branche BA descendroit; c'est pourquoi cet air dilaté ayant moins de force que celui qui pese sur la surface de l'eau du vase, celui-ci forceroit l'eau de couler de nouveau par la branche BA.

Ces sortes de Siphons adroitement cachés dans les parois d'un vase, & disposés de differentes façons, produisent des effets gracieux & qui surprennent beaucoup ceux qui n'en connoissent pas la cause.

485. Soit un grand vase ou reservoir AC, (*Fig*. 230.) plein d'eau; je range plusieurs caisses MN, RS, &c. horizontalement & au niveau du bassin, j'adapte aux fonds de ces caisses des tuyaux DE, FH, &c. qui ont à leurs extrêmités E, H des robinets; j'adapte aussi au-dessus de ces caisses des tuyaux LX, PQ qui entrent dans d'autres caisses TZ, YV posées de façon que les plus éloignées du bassin AC soient plus hautes que celles qui en sont plus proches; les extrêmités X, Q des tuyaux LX, PQ doivent entrer bien avant dans les caisses TZ, YV, mais non pas tout-à-fait jusqu'à la surface supérieure. Je mets à la caisse TZ un tuyau *ab* qui plonge dans le vase AC & entre dans la caisse TZ, je mets un autre tuyau *hf* dont l'extrêmité *f* plonge dans la caisse

TZ. Cette Machine étant faite, je remplis d'eau les caiſſes inférieures MN, RS par le moyen d'une ouverture qui eſt ſur leur ſurface ſupérieure, & je ferme cette ouverture de façon que l'air ne puiſſe pas y entrer; j'ouvre le robinet E, & à meſure que l'eau de la caiſſe MN commence à deſcendre & à couler par E, l'air qui ſe trouve dans les caiſſes ſupérieures & dans leurs tuyaux de communication avec les inférieures ſe dilate de plus en plus & ſon reſſort s'affoiblit; c'eſt pourquoi l'air qui peſe ſur la ſurface de l'eau du vaſe AC devenant le plus fort, fait monter l'eau par le tuyau *bc*, & la caiſſe TZ s'en remplit. Je ferme le robinet E avant que toute l'eau de la caiſſe MN ſe ſoit écoulée; car ſi cela arrivoit, l'air qui rentreroit par E dans les tuyaux ED, LX ſe trouvant auſſi fort que celui qui eſt ſur la ſurface du vaſe AC empêcheroit l'eau de continuer à monter dans le tuyau *ab*. J'ouvre le robinet H, & l'eau de la caiſſe RS commençant à couler, l'air de la caiſſe ſupérieure YV ſe dilate & perd de ſon reſſort, ainſi l'eau de la caiſſe TZ monte par le tuyau *fh* & coule dans la caiſſe YV; & continuant à mettre des caiſſes dans la diſpoſition que je viens de dire, je pourrois aiſément faire monter l'eau au-deſſus du reſervoir AC auſſi haut que je voudrois, à condition cependant que les tuyaux *ba*, *fh*, &c. fuſſent chacun d'une hauteur au-deſſous de 32 pieds, pour les raiſons que j'ai déja dit.

Cette Machine eſt fort propre à faire voir comment on peut élever l'eau auſſi haut que l'on voudra par le moyen de la ſeule dilatation de l'air, mais il eſt aiſé de voir qu'elle ne feroit pas des plus commodes pour l'uſage.

De la Fontaine de Heron d'Alexandrie.

486. Cette Fontaine fait monter l'eau par le moyen de la compreſſion de l'air : on le conſtruit ainſi.

AB, (*Fig.* 231.) eſt un grand vaſe dont le couvercle ſupérieur AEFC eſt concave, HL eſt une cloiſon ou diaphragme qui coupe le vaſe en deux parties; FS eſt un tuyau adapté au fond concave AEFC qui paſſe à travers le diaphragme HL & qui deſcend à une petite diſtance du fond MB; PR eſt un autre tuyau adapté au diaphragme HL qui entre très-peu dans la partie inférieure HB, & qui monte dans la ſupérieure AL à une petite diſtance du couvercle AEFC; enfin TX eſt un autre tuyau adapté au

couvercle AEFC & qui descend dans la cavité supérieure AL jusqu'à une petite distance du diaphragme HL.

Pour se servir de cette Machine, on verse de l'eau par l'orifice T du tuyau TX jusqu'à ce qu'on entende qu'elle coule dans la cavité inférieure HB par l'orifice P du tuyau PR; alors on bouche l'orifice T, & on verse de l'eau par l'orifice F du tuyau FS; cette eau en montant peu à peu dans la cavité HB comprime l'air qui est dans cette cavité, & celui qui est resté dans la cavité AL; de sorte que lorsqu'elle est parvenue à une certaine hauteur YZ, l'air comprimé la tient en balance & l'empêche de monter plus haut. Or, cette eau monteroit jusqu'en F si elle ne trouvoit point d'obstacle dans toute la capacité AB. Donc, l'air comprimé par cette eau comprime aussi l'eau qui est dans la capacité supérieure AL avec une force capable de l'élever à une hauteur égale à ZF. Ainsi si l'on débouche l'orifice T, la colonne d'air extérieur qui porte sur cet orifice, & qui seroit en équilibre avec l'air intérieur s'il n'étoit pas comprimé, cédera à la force de cet air comprimé, & l'eau de la capacité supérieure AL jaillira par l'orifice T à une hauteur égale à ZF, ce qui durera jusqu'à ce que l'eau de la capacité AL se trouve plus basse que l'extrêmité X du tuyau TX; car quoiqu'à mesure que l'eau de la cavité AL jaillit, l'air comprimé puisse se dilater davantage dans cette cavité, cependant l'eau qu'on versera toujours par l'orifice F du tuyau FS, montera davantage dans la cavité inférieure HB, ce qui tiendra l'air des deux cavités dans le même état de compression.

De la Pompe Aspirante.

487. La Pompe Aspirante est un cylindre creux AB (*Fig.* 232.) ayant à sa base LB un tuyau CD, auquel est une *Soupape* ou couvercle CH qui s'ouvre en dedans du cylindre & qui peut se refermer par son propre poids; on adapte à ce cylindre un piston MVRZSX, auquel est une autre soupape EF qui s'ouvre de bas en haut, & qui se referme par son propre poids.

Quand on veut se servir de cette Machine, on plonge le tuyau CD verticalement dans l'eau; on enfonce le piston jusqu'en L, & l'air compris entre le piston & le fond LB de la Pompe se trouvant comprimé de plus en plus à mesure que le piston descend, se fait jour en ouvrant la soupape EF, laquelle se referme lorsque le piston est parvenu en L. On éleve le piston, & comme à me-

sure qu'il s'éloigne du fond il laisse un vuide dans lequel il ne se trouve que très-peu d'air extrêmement rarefié qui ne sçauroit être en équilibre avec celui du tuyau, celui-ci se dilate en ouvrant la soupape CH, laquelle après cette dilatation se referme par son propre poids; cependant l'air dilaté du tuyau n'étant plus en équilibre avec l'air qui pese sur la surface de l'eau, il est clair que l'eau doit monter jusqu'à ce que l'air dilaté soit comprimé de façon à être en équilibre avec elle. On enfonce de nouveau le piston jusqu'en L, & l'air compris entre lui & le fond LB se trouvant de nouveau comprimé se fait encore jour par la soupape qui se referme quand le piston est parvenu en L; c'est pourquoi retirant le piston, ce qui étoit resté d'air dans le tuyau se fait encore jour par la soupape CH, & l'eau monte dans le cylindre jusqu'à une certaine hauteur où elle se tient en équilibre avec l'air dilaté qu'elle condense, & la soupape CH se referme. On enfonce encore le piston jusqu'en L, & non-seulement l'air qui étoit resté, mais encore l'eau qui est montée dans le cylindre sort par la soupape EF laquelle se referme, & continuant à relever & à enfoncer successivement le piston, on fera monter de l'eau tant qu'on voudra au-dessus de la soupape EF, & on la fera couler par un tuyau PQ adapté horizontalement au sommet du cylindre AB.

Mais il faut observer que la hauteur du tuyau CD au-dessus de l'eau qu'on veut élever doit être moindre que 32 pieds; car l'air qui presse la surface de l'eau ne peut élever l'eau qu'à cette hauteur, & c'est même à une de ces Pompes aspirantes que nous sommes redevables de la découverte de cette proprieté de l'air. Le Jardinier de Galilée, à ce qu'on dit, arrosoit son jardin par le moyen d'une Pompe; au bout de quelques années la Pompe se trouvant usée il en fit construire une autre, & soit par hazard, ou de dessein prémédité la longueur du tuyau d'aspiration fut faite de plus de 32 pieds; mais quel fut l'étonnement du Jardinier, lorsque la Machine ayant été placée, il trouva qu'il faisoit de vains efforts pour faire remonter l'eau. Surpris de cet évenement auquel il n'avoit garde de s'attendre, il courut l'annoncer à son Maître comme un prodige étonnant qui venoit d'arriver dans sa maison. Galilée étoit aussi profond Physicien que sçavant Géometre. Accoutumé à rechercher les causes des effets les plus surprenans qu'on voit dans la Nature, il s'apperçut qu'il n'y avoit que l'air qui fût capable de faire remonter l'eau dans une Pompe, & de-là il conclut aisément que si l'eau ne remontoit qu'à 32

pieds, cela ne provenoit que de ce qu'une colonne d'air de même base que celle de l'eau, & dont la hauteur est égale à celle de l'atmosphére pesoit autant qu'une colonne d'eau de même base & de 32 pieds de hauteur. Les expériences qu'il fit en conséquence, & une infinité d'autres qu'on a faites après, lui ont établi pour régle certaine & incontestable ce qu'il ne regardoit d'abord que comme une conjecture.

Ce qu'il y a encore à observer à l'égard des pompes, c'est que les charnieres des soupapes ne soient pas faites de métaux qui sont sujets à la rouille, ni de façon que le limon de l'eau entre dans leurs jointures ; car dans l'un & l'autre cas le jeu de ces charnieres deviendroit trop dur, & quelquefois même il s'arrêteroit tout court. C'est pour cette raison qu'on a toujours crû que les meilleures soupapes étoient celles qu'on construit, ainsi qu'on va voir.

Supposons que le cercle HL (*Fig.* 233.) represente le fond d'une pompe ou d'un piston, & que le cercle NCR represente l'ouverture. On prend une piece de cuir MNCRS dont la partie NCR couvre exactement l'ouverture sans pouvoir tomber par dessous, & dont l'autre partie MNRS soit bien attachée sur le cercle HL ; ainsi la ligne NR de ce cuir qu'on doit prendre flexible lui sert de charniere ; mais comme l'eau en venant à peser au-dessus de la partie NCR pourroit la faire fléchir. On a soin de mettre sur cette partie une plaque de fer ou de cuivre de même grandeur. Toutes les soupapes qu'on a voulu substituer à la place de celle-ci ont presque toujours réussi fort mal, quoique leur invention parut d'abord ingénieuse.

De la Pompe Refoulante.

488. La Pompe Refoulante ne differe de l'Aspirante qu'en ce que le piston MNVXT (*Fig.* 234.) entre dans la Pompe par le bas, & que le diaphragme PL est environ vers le milieu ; quand on tire le piston de P en M l'eau qui est par dessous ouvre la soupape FH, & entre dans la pompe, & quand on repousse le piston de M en P la soupape FH se referme, & l'eau qui est entrée au-dessus du piston se trouvant comprimée à mesure que le piston monte, ouvre la soupape RS, & entre dans la cavité AL après quoi la soupape RS se referme ; c'est pourquoi si l'on continue à

baiſſer & hauſſer le piſton ſucceſſivement, on fera monter tant d'eau qu'on voudra.

Du choc des Fluides contre les Corps ſolides.

489. Lorſqu'un corps ſolide ABCD (*Fig.* 235.) choque un autre corps ſolide EF; il faut faire attention à la maſſe, à la viteſſe & à ſa direction; le produit de la maſſe par la viteſſe eſt la force du corps ABCD, & ce corps choque avec toute ſa force ſi la direction OR de ſon mouvement eſt perpendiculaire au corps choqué EF, & avec moins de force ſi cette direction eſt oblique.

Quant à l'étendue de la face BC qui choque le corps EF, il importe peu qu'elle ſoit plus ou moins grande; car toutes les parties du corps ABCD étant étroitement liées enſemble, leur effort commun ſe réunit à leur centre de gravité O, de ſorte que EF reçoit le même choc que ſi toutes les parties du corps ABCD le touchoient.

490. Il n'en eſt pas de même du choc des fluides contre les corps ſolides; les fluides n'ayant pas toutes leurs parties intimément unies les unes aux autres, n'ont point de centre de gravité à moins qu'on ne renferme un fluide dans un vaſe bien bouché qu'on laiſſe enſuite tomber vers le centre de la terre. Ainſi un ſolide choqué par un fluide ne reçoit à chaque inſtant que l'impreſſion des molécules d'eau qui le touchent. C'eſt pourquoi dans ces ſortes de chocs il faut avoir égard à la direction, à la grandeur de la ſurface choquée & à la viteſſe. Plus la ſurface choquée eſt grande, la viteſſe étant la même, plus il y a de molécules d'eau qui touchent le corps choqué; & plus la viteſſe eſt grande, la ſurface étant la même, plus il ſe trouve auſſi de molécules qui choquent cette ſurface dans un certain tems. Suppoſons, par exemple, que deux fluides de même nature MABN, *mabn* (*Fig.* 236.) choquent les ſurfaces égales AB, *ab* avec des viteſſes inégales, enſorte que la viteſſe du premier ſoit, ſi l'on veut, double de celle du ſecond; les molécules d'eau du fluide MABN feront donc dans une ſeconde un chemin double de celui que feront les molécules du fluide *mabn*, & par conſéquent dans un même tems, c'eſt-à-dire dans une ſeconde le nombre des molécules qui choqueront la ſurface AB ſera double du nombre des molécules qui choqueront la ſurface *ab*; d'où il ſuit que les ſurfaces

faces étant égales, les volumes des fluides qui choquent dans un même tems, font entr'eux comme leurs viteffes.

491. PROPOSITION LXXXII. *Si deux fluides de même nature choquent avec une même direction ou fous un même angle deux plans inégaux* A, B, *les forces dont ces plans font choquées, font entr'elles comme les plans.*

Les deux fluides étant d'une même nature ont une même denfité; & l'on fuppofe que les viteffes font égales de même que les directions; ainfi la différence des chocs ne peut provenir que de la différence des volumes qui choquent. Or, à caufe de l'égalité des viteffes, la quantité de molécules qui choquent le plan A eft à la quantité des molécules qui choquent le plan B dans le même tems, comme le plan A eft au plan B (*N*. 490.); donc la force du choc du fluide contre le plan A eft à celle du choc du fluide contre le plan B, comme A eft à B.

492. *Si les viteffes font inégales & les plans égaux, les forces des chocs font entr'eux comme les quarrés des viteffes.* Car dans cette fuppofition les quantités de molécules qui choquent dans le même tems font entr'elles comme les viteffes (*N*. 490.); ainfi les forces, c'eft-à-dire les volumes, ou maffes, ou quantités de molécules, multipliés par leurs viteffes, font entr'eux comme les viteffes multipliés par leurs viteffes, c'eft-à-dire comme les quarrés des viteffes.

493. Suppofant toujours que les fluides foient de même nature, & qu'ils choquent avec la même direction, fi nous nommons le plan $A = A$, le plan $B = a$, la viteffe du premier fluide $= V$, la viteffe du fecond $= u$, la force du choc du premier fluide contre le plan $A = F$, & celle du fecond fluide contre l'autre plan $= f$, & que nous faffions la raifon $A \times VV$, auu qui eft la compofée de la raifon A, a, des plans, & de la raifon VV, uu des quarrés des viteffes, nous aurons pour tous les cas $F.f :: A \times VV. auu$.

Car fi $V = u$ l'analogie $F.f :: A \times VV$, auu fe changera en $F.f :: A.a$, & c'eft ce que nous venons de voir (*N*. 491.)

Si $A = a$ nous aurons $F.f :: VV.uu$, & c'eft ce qu'on vû (*N*. 492.).

Si $A = a$, & $V = u$, donc $A \times VV = auu$, & partant $F = f$.

Enfin, fi tout eft inégal nous aurons $F.f :: AVV.auu$, c'eft-à-dire les forces des chocs font en raifon compofée de la raifon des quarrés des viteffes, & de la raifon des plans; car à caufe de

l'inégalité des plans & des vitesses ; les volumes ou masses qui choquent sont en raison composée de la raison des plans, & de celle des vitesses, c'est-à-dire, ces volumes sont entr'eux comme AV est à *au* ; or, les forces sont comme les volumes ou masses multipliées par les vitesses ; donc elles sont comme AVV est à *auu*.

Supposons $A = 2$ & $a = 1$, il est clair que si les vitesses étoient égales la quantité de molécules qui choquent A seroit à celle qui choque *a* dans le même tems comme 2 est 1 (*N*. 491.) ; ainsi A seroit choqué par une masse d'eau double de celle qui choqueroit *a*. Maintenant supposons encore $V = 3$ & $u = 1$, le plan A se trouvant choqué avec une vitesse triple de celle avec laquelle le plan *a* est choqué, sera par conséquent choqué avec une masse triple de la précédente ; ainsi cette masse sera sextuple de celle qui choque *a*, c'est-à-dire les masses qui choqueront A, *a*, sont entr'elles comme 6 à 1 ; or, pour avoir les forces, il faut multiplier les masses par les vitesses 3, 1 ; donc ces forces sont comme 3×6, & 1, ou comme le plan 2 multiplié par le quarré 9 de la vitesse 3 est au plan 1 multiplié par le quarré 1 de la vitesse 1, & ainsi des autres.

494. PROPOSITION LXXXIII. *Déterminer les forces des chocs de deux fluides de différente nature qui choquent deux plans avec la même direction.*

En premier lieu, si l'on suppose que les plans A, B soient égaux & les vitesses égales, les quantités de molécules qui choqueront les deux plans seront égales entr'elles ; mais à cause qu'on suppose les fluides de différente nature, & par conséquent de différente densité ; les masses de ces quantités de molécules seront entr'elles comme les densités ; ainsi les forces étant dans ce cas comme les masses multipliées par les vitesses, seront aussi comme les densités multipliées par les vitesses, mais les vitesses sont égales, donc les forces des chocs seront entr'elles comme les densités.

En second lieu, si les vitesses sont égales & les plans inégaux, les quantités de molécules qui choquent les plans dans un même tems seront non-seulement dans le rapport des plans (*N*.491.), mais encore dans la raison des densités. Ainsi ces quantités de molécules ou masses seront comme les produits des plans par les densités. Or les forces des chocs sont entr'elles comme les produits des masses par les vitesses, & les vitesses sont égales ; donc

les forces des chocs feront comme les maffes ou comme les produits des plans par les denfités.

En troifiéme lieu, fi les viteffes font inégales & les plans égaux, les quantités de molécules qui choqueront les plans dans un même tems feront dans la raifon des viteffes & de celles des denfités. Ainfi ces quantités de molécules ou maffes feront comme les produits des denfités par les viteffes. Or les forces des chocs font comme les produits des maffes par les viteffes. Donc ces forces font entr'elles comme les produits des denfités par les viteffes multipliés par les viteffes, c'eft-à-dire comme les denfités multipliées par les quarrés des viteffes.

Enfin, fi les viteffes font inégales & les plans auffi, les quantités de molécules feront entr'elles dans la raifon des plans, dans celle des viteffes & dans celles des denfités, & par conféquent elles feront comme les produits des plans des viteffes & des denfités. Or les forces des chocs font entr'elles comme les produits des quantités de molécules ou des maffes par les viteffes; donc ces forces font comme les produits des plans, des denfités & des viteffes multipliés par les viteffes, c'eft-à-dire comme les produits des plans & des denfités multipliés par les quarrés des viteffes ou en raifon compofée de la raifon des plans, de celle des denfités, & de celles des quarrés des viteffes.

495. Ainfi nommant A le premier plan, *a* le fecond, V la viteffe du fluide qui choque A, & D fa denfité, *u* la viteffe de l'autre fluide, & *d* fa denfité; F la force du choc du premier fluide, & *f* la force du choc du fecond, & faifant la raifon $A \times D \times VV$, *aduu* qui eft la compofée de la raifon des plans, de celle des denfités, & de celle des quarrés des viteffes, & faifant $F.f :: A \times D \times VV. aduu$, cette analogie répondra à tous les cas.

Car fi l'on fait $V = u$, & $A = a$, on aura $F.f :: D.d$, ainfi que nous l'avons vû.

Si l'on fait $V = u$, & le refte inégal, on aura $F.f :: A \times D. ad$, comme nous l'avons vû auffi, & ainfi des autres.

Remarque. Tout ce que nous venons de dire dans les deux Propofitions précédentes à l'égard des fluides qui choquent des plans qui ne fe meuvent pas, doit s'entendre auffi des plans qui fe mouveroient dans des fluides tranquilles; étant certain que la refiftance que ces plans éprouveroient de la part des fluides feroit égale à la force du choc qu'ils reffentiroient s'ils étoient en

repos, & que les fluides vinssent à les choquer avec la vitesse avec laquelle ils se meuvent.

496. PROPOSITION LXXXIV. *Si un fluide choque obliquement une droite* AB (Fig. 237.) *selon des droites paralelles* AC, DB, *sa vitesse absolue est à sa vitesse relative, comme le sinus total est au sinus de l'angle d'incidence.*

Supposons que la vitesse absolue soit exprimée par la droite AC; je mene du point C la droite CF perpendiculaire sur AB, & selon les loix du mouvement composé, la vitesse AC est équivalente aux deux vitesses CF, FA, mais la vitesse FA n'agit point sur la ligne AB qui lui est paralelle; donc le fluide n'agit sur AB qu'avec la vitesse CF; or en prenant CA pour le sinus total, la droite CF est le sinus de l'angle d'inclinaison CAF du fluide sur la ligne AB; donc la vitesse absolue du fluide est à sa vitesse relative comme le sinus total est au sinus de l'angle d'inclinaison.

497. COROLLAIRE Ier. *La masse du fluide qui choque indirectement la ligne* AB *est à celle qui le choqueroit directement, comme le sinus de l'angle d'incidence est au sinus total.*

Je mene du point B la perpendiculaire BE sur AC; il n'y a pas plus de filets d'eau qui choquent AB qu'il n'y en a qui choqueroient la droite BE sur laquelle ces filets sont perpendiculaires; c'est pourquoi le nombre de filets qui choquent AB est exprimé par la droite BE, au lieu que si AB étoit choquée directement, le nombre de filets qui le choqueroit seroit exprimé par AB. Or, nous supposons la vitesse égale dans le choc direct & dans le choc indirect; donc le volume du choc oblique est au volume du choc direct comme EB est à AB. Prenant donc AB pour sinus total, la droite EB sera le sinus de l'angle CAB d'incidence du fluide, & partant la masse du choc oblique est à la masse du choc direct, comme le sinus de l'angle d'incidence est au sinus total.

498. COROLLAIRE II. *La force du choc oblique du fluide contre la droite* AB, *est à la force avec laquelle il le choqueroit directement, comme le quarré du sinus de l'angle d'incidence est au quarré du sinus total.*

La vitesse absolue est à la respective comme le sinus total est au sinus de l'angle d'incidence (*N.* 496.), & le volume ou masse qui choqueroit directement est au volume qui choque indirectement dans la même raison du sinus total au sinus de l'angle d'incidence (*N.* 497.); or, la force qui choquera directement est le



produit de la masse directe par la vitesse absolue, & la force qui choque indirectement est le produit de la masse qui choque indirectement par la vitesse relative; donc ces deux forces sont entr'elles comme le produit du sinus total par le sinus total est au produit du sinus de l'angle d'incidence par le même sinus, ou comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de l'angle d'incidence; & partant la force du choc indirect est à celle du choc direct, comme le quarré du sinus de l'angle d'incidence est au quarré du sinus total.

499. COROLLAIRE III. Si l'on décrit un demi-cercle AEB autour de la ligne AB, & que du point B on mene la droite BE au point E où la direction CA coupe le cercle; & du point E, une droite EH perpendiculaire sur AB, la force du choc direct sera à la force du choc oblique, comme le diamétre AB est à sa partie BH; car à cause des triangles semblables AEB, BEH, nous avons AB. BE :: BE. BH, donc $\overline{AB}^2$. $\overline{BE}^2$ :: AB. BH; mais par le Corollaire précédent la force du choc direct est à celle du choc oblique, comme $\overline{AB}^2$ est à $\overline{BE}^2$; donc ces deux forces sont aussi comme AB. BH.

500. COROLLAIRE IV. Par le moyen du Corollaire précédent, on peut trouver aisément le rapport des différentes forces des chocs d'un même fluide qui choqueroit une même ligne avec la même vitesse sous différentes directions; par exemple, si l'on demande la force du choc sous la direction RA, j'abaisse du point R la droite RF perpendiculaire sur AB, & par conséquent la force du choc direct est à celle du choc oblique sous la direction AR comme AB est à BF; or, nous avons aussi la force du choc direct est à celle du choc oblique sous la direction AC, comme AB est à BH, c'est pourquoi nommant F la force du choc direct, O la force du choc oblique sous la direction CA & *o* la force du choc oblique sous la direction RA, nous aurons d'une part F. O :: BA. BH ou F. BA :: O. BH, & de l'autre F. *o* :: BA. BF ou F. BA :: *o*. BF; donc O. BH :: *o*. BF, ou O. *o* :: BH. BF, c'est-à-dire la force du choc oblique sous la direction CA, est à celle du choc oblique sous la direction RA, comme BH est à BF, & ainsi des autres.

501. COROLLAIRE V. Si le fluide choquoit directement la droite AB, le volume qui choqueroit seroit comme la ligne AB multipliée par la vitesse, car ce volume devient d'autant plus grand que

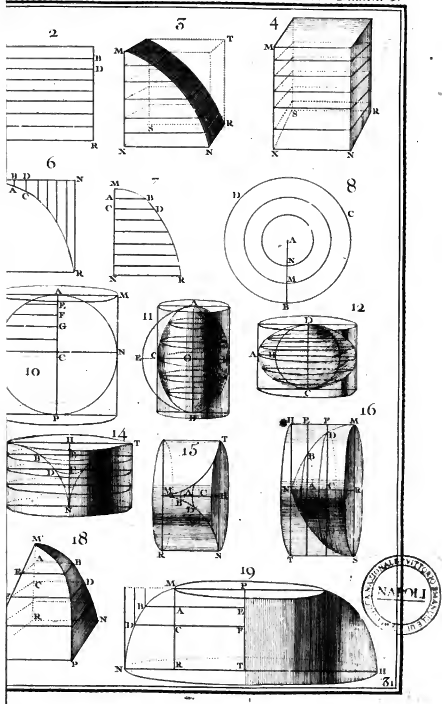
la vitesse est plus grande (*N.* 490.); ainsi nommant V la vitesse; le volume qui choqueroit directement seroit $AB \times V$, & par conséquent la force du choc seroit $AB \times V \times V$ ou $AB \times V^2$; or nous venons de voir que le choc direct est au choc indirect sous la direction AC, comme AB. BH; faisant donc AB. BH :: $AB \times V^2$. $\frac{BH \times AB \times V^2}{AB} = BH \times V^2$, ce quatriéme terme $BH \times V^2$ exprimera la force du choc sous la direction AC, & par la même raison on trouvera que $BF \times V^2$ exprime la force du choc sous la direction AR, & ainsi des autres.

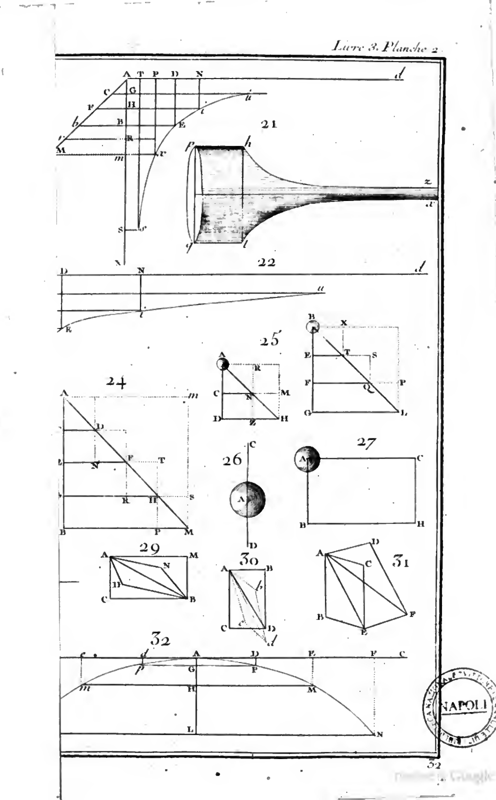
502. COROLLAIRE VI. Si la vitesse sous la direction AC étoit exprimée par V, & la vitesse sous la direction RA par u, la force du choc sous la direction AC seroit $BH \times V^2$, & celle du choc sous la direction RA seroit $BF \times u^2$.

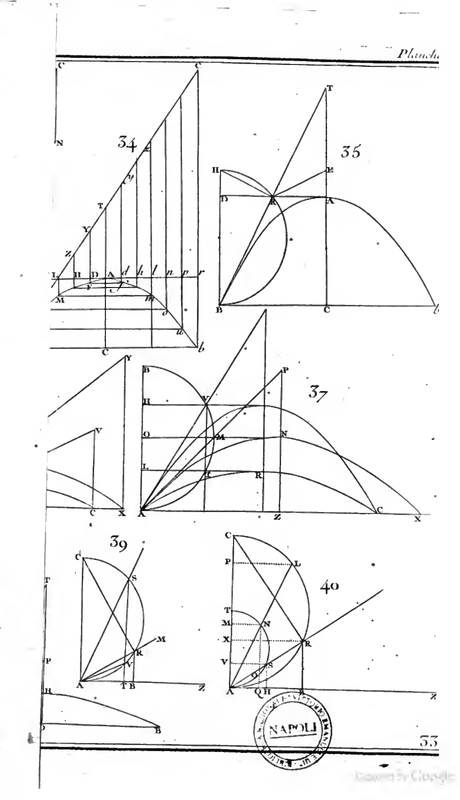
Si la vitesse du fluide qui choque sous la direction AC étoit $= V$ & sa densité $= D$, & que la vitesse du fluide qui choque sous la direction RA fût $= u$ & sa densité d, le choc direct du premier fluide seroit $AC \times D \times V^2$, & son choc sous la direction AC seroit $BH \times B \times V^2$; de même le choc direct du second fluide seroit $AC \times d \times u^2$, & son choc sous la direction RA seroit $BF \times d \times u^2$, de sorte que le choc oblique du premier fluide sous la direction AC seroit au choc oblique du second sous la direction RA, comme $BH \times D \times V^2$ est à $BF \times d \times u^2$, & ainsi des autres cas.

Fin du troisiéme Livre.




2
3
4
6
7
8
10
11
12
14
15
16
18
19
31


21
22
24
25
26
27
29
30
31
32


34
35
37
39
40



42

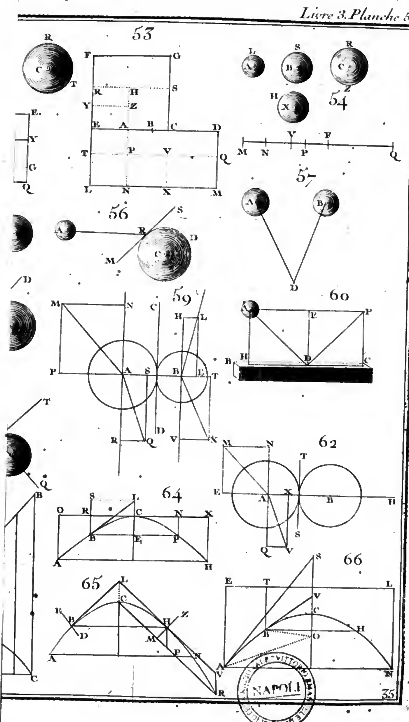
45

46

48

49

51



53
54
56
57
59
60
62
64
65
66

68

70

72

73

75

76

77

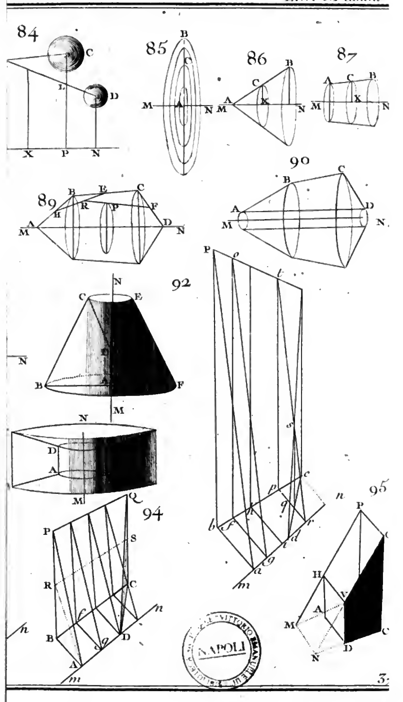
78

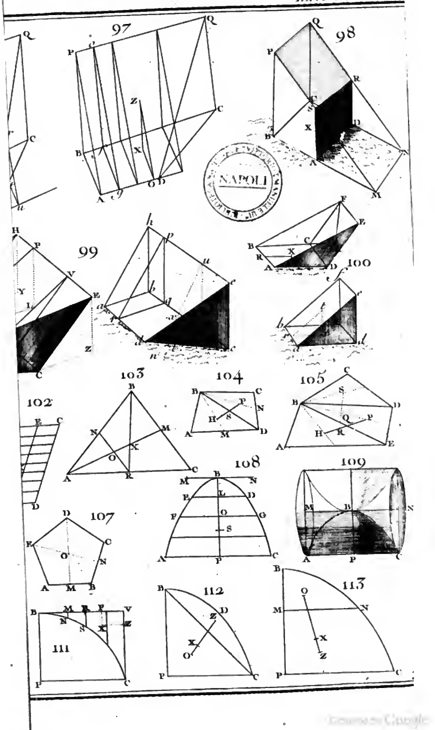
79

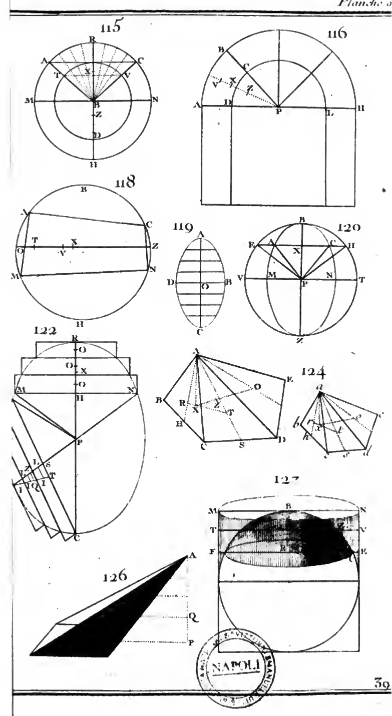
81

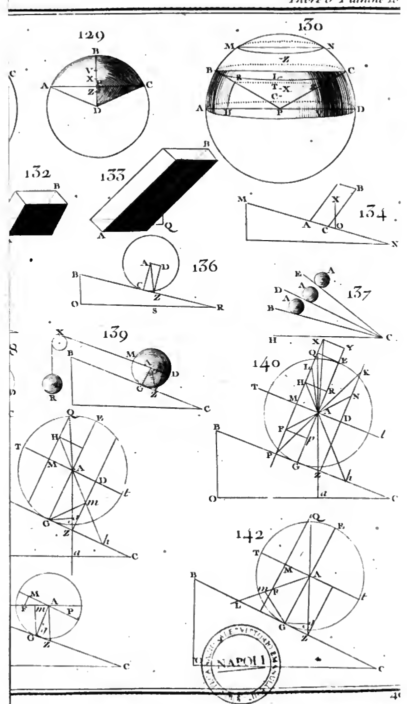
82

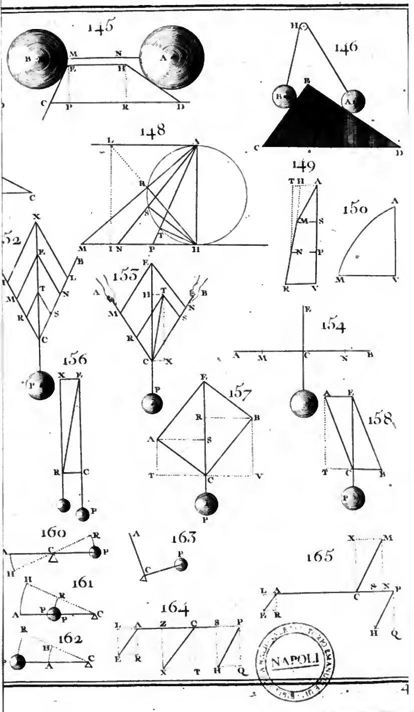
83

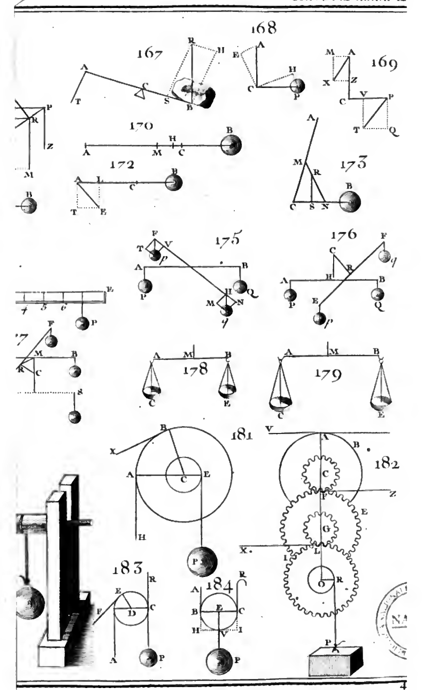

84
C
L
D
X
P
N
85
B
C
M
A
N
86
B
C
A
M
X
N
87
A
C
B
M
X
N
89
B
E
C
H
R
P
F
A
M
D
N
90
B
C
A
M
D
N
92
N
C
E
D
B
A
F
M
N
N
D
A
M
P
o
t
s
c
p
q
b
f
h
i
d
r
g
a
m
Q
94
P
S
R
C
f
B
g
D
A
n
n
m
n
95
P
H
V
A
M
C
D
N

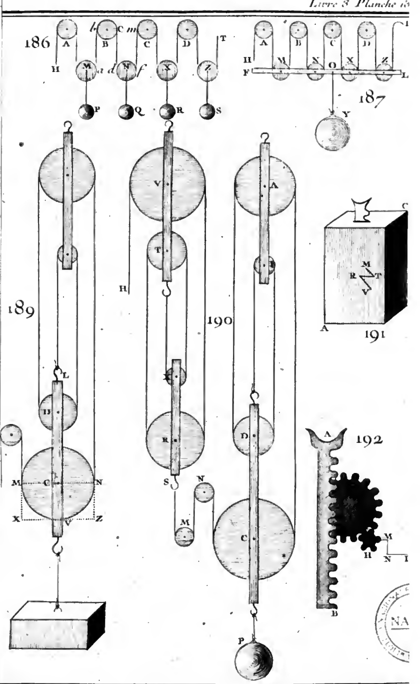

97
98
99
100
102
103
104
105
107
108
109
111
112
113

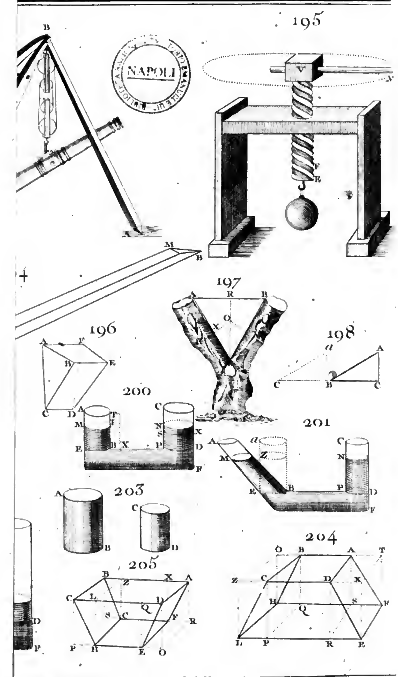

115
R
A
C
T
X
V
M
N
B
Z
D
H
116
B
C
X
V
Z
A
D
P
L
H
118
B
A
C
T
X
O
V
Z
M
N
H
119
A
D
O
B
C
120
B
E
A
C
H
X
V
M
P
N
T
Z
122
R
O
O
X
O
M
H
N
P
L
S
Z
T
Q
I
C
A
E
O
B
R
Z
X
T
H
C
S
D
124
a
b
r
e
x
t
h
d
127
M
B
N
T
V
F
E
126
A
Q
P

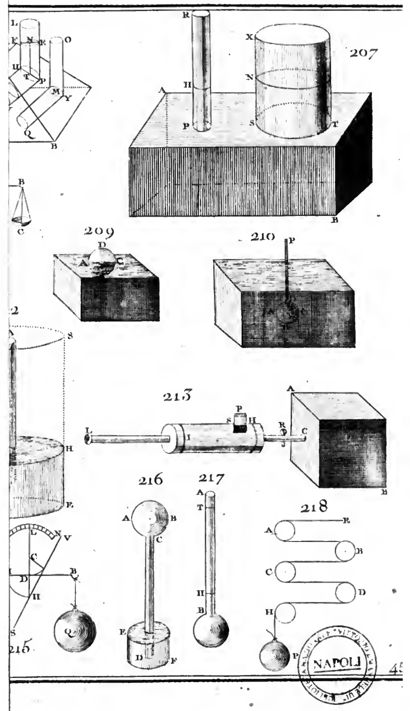

129
130
132
133
134
136
137
139
140
142

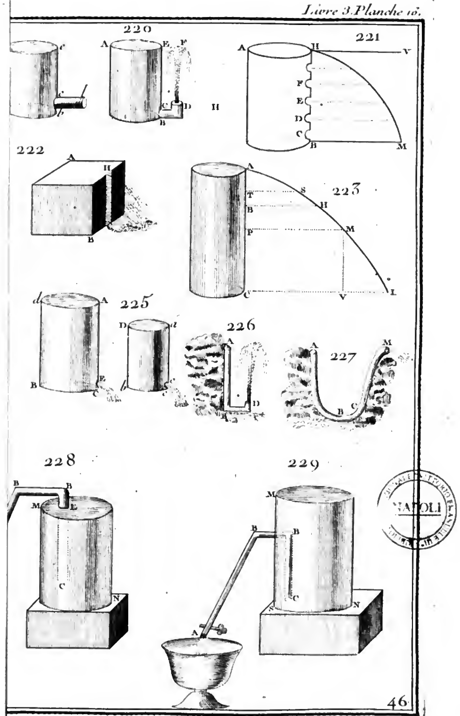

145
146
148
149
150
152
153
154
156
157
158
160
161
162
163
164
165

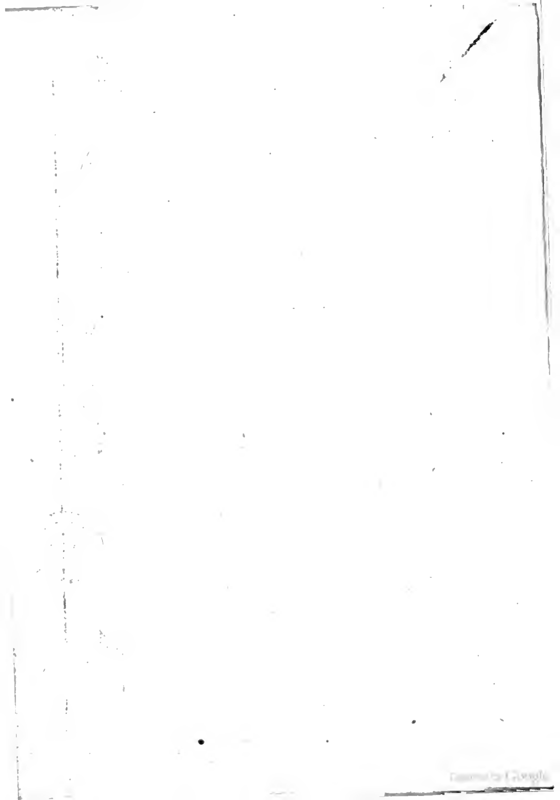

167
168
169
170
172
173
175
176
178
179
181
182
183
184

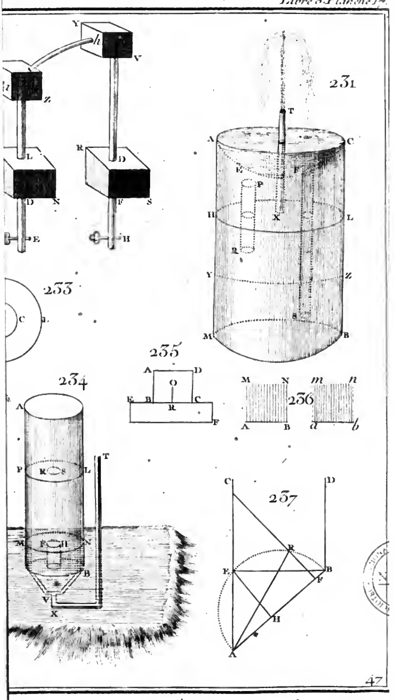

186
187
189
190
191
192

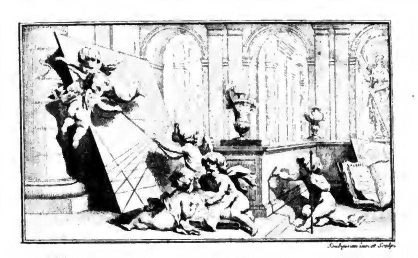

195
V
F
E
B
A
M
B
196
A
F
B
E
C
D
197
A
R
B
O
X
198
a
A
C
B
C
200
C
T
M
N
S
X
E
B
X
P
D
F
201
A
a
C
M
Z
N
E
B
P
D
F
203
A
C
B
D
204
O
B
A
T
Z
C
D
X
H
S
F
Q
L
P
R
E
205
B
X
A
Z
C
L
D
Q
S
C
F
R
P
H
E
O


207
209
210
2
213
216
217
218
215


220
221
222
223
225
226
227
228
229




231
233
234
235
236
237



Soubeyran inv. et Sculp.

TRAITÉ
DE
PERSPECTIVE.

1. LA *Perspective* est la Science de représenter les objets sur une surface tels qu'ils nous paroissent lorsque nous les regardons fixement & sans changer de place.

2. Il y a trois sortes de Perspectives; la *Perspective ordinaire*, la *Perspective militaire*, & la *Perspective curieuse*.

3. La Perspective ordinaire représente les objets sur une surface plane ou tableau, paralelle à nos yeux, & par conséquent perpendiculaire sur le terrein.

4. La Perspective militaire représente les objets sur une surface plane, non pas comme ils nous paroissent lorsque nous les regardons fixement & sans bouger, mais à peu près comme ils sont, & l'on en agit ainsi afin de pouvoir conserver le rapport des véritables mesures des objets qu'on représente.

5. Enfin, la Perspective curieuse représente les objets sur toutes sortes de surfaces planes ou courbes dans telle position que l'on veut, de façon que ces objets nous paroissent sur ces surfaces,

tels que nous les voyons sur le terrein. La même Perspective apprend aussi à faire sur le papier ou sur le carton des figures difformes & monstrueuses, lesquelles étant présentées à un miroir concave ou convexe, ou fait en pyramide, &c. nous paroissent avoir leurs véritables proportions.

6. Nous allons voir dans ce Traité les regles de la Perspective ordinaire & de la militaire; & nous dirons très-peu de chose, ou presque rien, de la Perspective curieuse, à cause de l'inutilité du sujet.

De la Perspective ordinaire.

7. L'œil est l'organe de la vision; son globe est composé de cinq tuniques, la *Cornée*, la *Sclerotique*, l'*Uvée*, la *Choroïde*, & la *Rétine*, & de trois humeurs, l'*Aqueuse*, la *Crystalline*, & la *Vitrée*.

8. La cornée est une tunique extérieure AB, (*Fig.* 1.) qui couvre le devant de l'œil; elle est mince, tansparente, un peu dure, & se jette en dehors.

9. La sclerotique CD est la continuation de la Cornée, mais elle est plus épaisse, plus dure, sans être transparente. La cornée & la sclerotique forment la surface extérieur du globe de l'œil. La sclerotique est couverte d'une membrane blanche qui forme le blanc de l'œil, & qu'on nomme la *Conjonctive.*

Le globe de l'œil formeroit une sphere parfaite, si la cornée n'étoit pas si convexe, & si le nerf optique ne s'y inseroit par la partie postérieure.

10. L'uvée est une tunique EF qui se trouve sous la cornée, & qui a au milieu un trou qu'on nomme prunelle de l'œil; cette tunique est de diverses couleurs, & c'est ce qui fait que sa partie que nous voyons à travers la cornée se nomme *Iris.*

11. La choroïde est la continuation de l'uvée; elle est de couleur noire, & tapisse tout le dedans de l'œil, de sorte qu'elle se trouve entre la sclerotique & la retine; la cornée tient à la sclerotique, & l'uvée à la choroïde par un ligament nommé ciliaire, les petits rameaux qui sortent de ce ligament & qui s'étendent jusqu'à l'humeur cristalline, se nomment productions ciliaires.

12. La rétine TV est une membrane mince, mollasse & médullaire qui est une extension du nerf optique PQ, laquelle s'étend sur toute la choroïde. Quoique le nerf optique soit blanc comme le cerveau où il prend son origine, la rétine cependant

ne paroît pas blanche, & la raison en est qu'elle est plongée dans une espece de glu qui est noire dans l'enfance, moins obscure à l'âge de vingt ans, grise à peu près à l'âge de trente, & enfin presque blanche à l'âge décrépit.

13. M. Ruisch prétend avoir trouvé entre la choroïde & la retine une autre tunique qui de son nom s'appelle *Tunique de M. Ruisch ;* mais comme de son propre aveu, cette tunique tient si fort à la choroïde qu'on a peine à la distinguer, d'autres Anatomistes prétendent que ce n'est autre chose que la surface intérieure de la choroïde, à cause qu'il n'y a presque point de membrane qu'on ne puisse diviser en d'autres membranes plus minces qu'elles.

14. L'endroit où le nerf optique entre dans l'œil est du côté du nez, & pour déterminer plus précisément sa position, il faut concevoir que l'œil regarde directement l'horizon, & que deux plans, l'un horizontal & l'autre vertical coupent son globe, l'insertion du nerf optique est un peu au-dessous du plan horizontal, & entre le nez & le plan vertical.

15. Entre la cornée & l'iris, il y a une cavité nommée *Chambre antérieure*, & entre l'iris & le cristallin M, il s'en trouve une autre un peu moins grande, nommée *Chambre postérieure;* la prunelle sert de communication à ces deux chambres, & l'une & l'autre sont remplies d'une liqueur à qui l'on donne le nom d'*Humeur aqueuse.* Cette humeur est déliée, claire, un peu salée, & sans odeur.

16. Le cristallin M est une humeur assez solide, transparente & convexe des deux côtés, mais un peu plus vers la partie intérieure de l'œil que du côté de l'iris ; elle est sans couleur jusqu'à l'âge de 20 ou 25 ans, ensuite elle est d'un jaune clair qui devient plus foncé avec le tems, de sorte qu'elle est aussi jaune que l'ambre lorsqu'on a atteint l'âge de 80 ans. Sa consistance varie aussi selon l'âge; elle est assez mollasse jusqu'à 25 ans, & elle se durcit peu à peu jusqu'à ce qu'on soit sexagenaire. Le cristallin est placé entre le centre de l'œil & l'humeur aqueuse, la partie antérieure de la membrane qui l'enveloppe & qui est extrêmement, fine se nomme *Arachnoïde.*

17. L'humeur vitrée O occupe toute la partie postérieure de l'œil, elle est transparente, flexible, moins solide que le cristallin & plus épaisse que l'humeur aqueuse; la choroïde & les produc-

tions ciliaires l'assujettissent & l'empêchent de se mêler avec l'humeur aqueuse.

18. Nous ne parlons point ici des muscles qui servent aux mouvemens des yeux, ni de la route des nerfs optiques dans le cerveau, ce détail est inutile pour notre sujet.

De la Lumiere.

19. On a donné le nom de *Lumiere* à tout ce qui frappe l'organe de la vûe, & donne à notre ame la perception des objets. Nous n'avons qu'à ouvrir les yeux pour être convaincus de son existence, & si nous faisons attention qu'elle passe à travers grand nombre de corps que l'air ne sçauroit pénetrer, tels que sont le papier, le verre, l'écaille, les diamans, & les autres pierres précieuses: nous en conclurons aisément qu'elle doit être une matiere d'une extrême subtilité.

20. Le feu & tous les corps qui tiennent de la nature du feu étant toujours dans une extrême agitation, pressent de toutes parts la matiere qui les environne & produisent la lumiere, ce qui leur a fait donner le nom de corps *lumineux;* les autres corps que nous ne voyons qu'à la faveur de la lumiere de ceux-ci, se nomment corps éclairés.

21. La moindre étincelle lumineuse peut être vûe de tous côtés, ainsi l'on peut concevoir la lumiere comme étant composée d'une infinité de rayons minces & déliés qui partent du point lumineux comme du centre d'une sphere. Mais comment ces rayons parviennent-ils jusqu'à nous? sont-ils lancés par les corps lumineux ensorte qu'ils ayent un mouvement local & progressif? agissent-ils au contraire sur nos yeux à peu près comme un bâton qui étant pressé par un bout presse un corps qui se trouve à l'autre bout? enfin la lumiere se communiqueroit-elle par des ondulations semblables à celles que l'on voit se former sur la surface d'une eau tranquille lorsqu'on y jette une pierre? c'est ce que les Physiciens n'ont point encore décidé d'un commun accord, & ce qui nous importe fort peu. Quelque parti que l'on prenne là-dessus, tout ce que nous allons établir dans ce Traité subsistera de la même façon; ceux qui seront curieux d'en sçavoir davantage pourront lire les Ouvrages de M. Descartes, du Pere Malebranche, de M. Huguens, de M. Rohaut, & des autres Modernes qui ont écrit sur cette matiere.

20. Puisque tout point lumineux peut être regardé comme un centre duquel partent de tous les côtés une infinité de rayons, & que la surface d'un corps lumineux comprend une infinité de ces points, il s'ensuit que la surface de tout corps lumineux est composée d'une infinité de centres d'où partent des rayons de toutes parts, & quoique ces rayons s'entrecoupent nécessairement dans leurs directions, leur action n'en est cependant pas interrompue, puisqu'il n'est aucun de ces points qu'on ne puisse voir de tous côtés, à moins que quelque corps opaque ne soit interposé entr'eux & l'œil du spectateur.

21. Lorsque les rayons d'un corps lumineux rencontrent un corps opaque qu'ils ne peuvent pénetrer, ils se réflechissent en ligne droite faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de reflexion, ainsi que nous l'avons démontré dans la Méchanique à l'égard des autres corps, & ce sont ces rayons qui nous rendent visibles les corps sur lesquels ils se sont réflechis.

22. Comme il n'est aucun point sur la surface d'un corps éclairé qu'on ne puisse voir d'une infinité d'endroits, il s'ensuit que les surfaces des corps éclairés doivent être regardées comme composées d'une infinité de points qui sont autant de centres d'où partent de toutes parts des rayons réflechis.

23. Les rayons qui partent des objets lumineux ou éclairés & frappent nos yeux en ligne droite, se nomment *Rayons directs ;* ceux qui avant de parvenir jusqu'à nous rencontrent une surface extrêmement polie sur laquelle ils se réflechissent de façon qu'ils portent à nos yeux l'image des objets d'où ils sont émanés avant de se réflechir, se nomment *Rayons réflechis*, tels sont les rayons des objets que nous voyons représentés dans les miroirs. Enfin, ceux qui passant d'un milieu dans un autre abandonnent leur premiere direction pour en suivre une autre, se nomment *Rayons rompus*, & l'action par laquelle ils se rompent se nomme *Refraction.* Tous les rayons qui passent de l'air dans l'eau, dans le verre, dans le cristal, &c. se brisent comme nous venons de le dire, & sont par conséquent des rayons rompus.

24. On a éprouvé depuis long-tems que si un rayon de lumiere passe d'un milieu moins épais dans un milieu plus épais, il se rompt au passage de ce second milieu en s'approchant de la ligne droite perpendiculaire sur la surface du second milieu, & que si au contraire il passe d'un milieu plus épais dans un milieu moins épais, il se rompt en s'éloignant de la ligne droite perpendicu-

laire ſur le milieu plus épais. Suppoſons que l'eſpace MXNT, (*Fig.* 2.) ſoit de l'air, que l'eſpace XLHN ſoit de l'eau, que le point A ſoit un point lumineux, & la ligne AB un de ſes rayons qui tombe ſur la ſurface XN de l'eau avec la direction AB; je mene en B la droite PQ perpendiculaire ſur la ſurface XN de l'eau, & le rayon AB au lieu de continuer ſa route en ligne droite de B en S prend la direction BR qui s'approche de la perpendiculaire BQ, & ainſi des autres.

25. Il n'eſt point de corps tranſparens qui n'ait des parties opaques & d'autres raboteuſes qui obligent les rayons de ſe réflechir. Les parties opaques interceptent les rayons qui les frappent & les empêchent de parvenir juſqu'à nous, c'eſt pourquoi la lumiere en devient plus foible, & l'image des corps que nous voyons à travers les corps tranſparens n'eſt pas ſi vive; les rayons qui ſe réflechiſſent ſur les parties raboteuſes nous portent avec eux les images de ces parties, & de-là vient que nous voyons non-ſeulement les corps dont les rayons lumineux paſſent à travers les pores des corps tranſparens, mais encore les corps tranſparens eux-mêmes.

26. Quelque polie que puiſſe être une ſurface, elle a toujours des parties raboteuſes qui en faiſant réflechir les rayons des corps lumineux dérangent l'ordre de leurs parties; or ces rayons dont les parties ſont alterées venant à frapper nos yeux nous portent l'image des parties de la ſurface qui les ont alterés, tandis que ceux qui n'ont ſouffert aucune alteration nous repréſentent l'objet dont ils ſont émanés avant de ſe réflechir. C'eſt pourquoi lorſque nous avons les yeux tournés vers une glace, nous voyons les objets qu'elle repréſente & la glace elle-même.

27. Lorſque les rayons de la lumiere directs ou réflechis vont en s'éloignant, on les nomme *Rayons divergens*, & lorſqu'ils vont en ſe rapprochant, on les nomme *Rayons convergens*.

28. Deux rayons divergens peuvent devenir convergens en paſſant par differens milieux. Soient, par exemple, les rayons divergens AB, AC, (*Fig.* 3.) qui partent du point lumineux A dans l'air, ces rayons venant à paſſer dans l'eau dont la ſurface eſt repréſentée par la ligne BC, s'approcheront des perpendiculaires MN, OP menées ſur la ſurface de l'eau aux points B, C, & prenant les directions BR, CT, ils deviendront moins divergens. Suppoſant donc qu'étant parvenus en R & T, ils rencontrent une ſurface convexe RT d'un autre liquide plus épais que

l'eau, ils se briseront encore en s'approchant des perpendiculaires RZ, TY, & cette réfraction pourra se faire de telle façon selon le rapport des differens liquides, que les rayons prendront des directions convergentes RL, TH, &c.

De quelle maniere se fait la Vision.

29. Soit l'objet AC, (*Fig.* 4.) posé vis-à-vis de l'œil EFD; tous les points A, B, C de cet objet sont autant de centres d'où partent une infinité de rayons de toutes parts, comme nous avons déja dit plus haut; mais nous ne considererons que ceux qui peuvent entrer dans la prunelle. Par exemple, de tous les points qui partent du point B, il n'y a que ceux qui sont entre les rayons BE, BF qui entrent dans la prunelle, tous les autres à droite & à gauche tombent sur la conjonctive, & se réflechissent sans entrer dans l'œil; or le rayon BD étant perpendiculaire à la cornée, au cristallin & à l'humeur vitrée, ne souffre aucune réfraction, & passe en ligne droite jusqu'au fond de l'œil en D, & c'est pour cette raison qu'on le nomme *Axe optique;* au contraire, les autres rayons du point B qui passent par la prunelle tombant obliquement sur les trois humeurs souffrent differentes réfractions; ainsi le rayon BE traverse l'humeur aqueuse en s'approchant de la perpendiculaire ER menée sur cette liqueur, à cause que l'humeur aqueuse est plus épaisse que l'air, de-là venant à rencontrer le cristallin qui est encore plus dense que l'humeur aqueuse, il se brise de nouveau en s'approchant de la droite ST perpendiculaire sur l'arachnoïde, & enfin au passage du cristallin dans l'humeur vitrée qui est moins dense que le cristallin, il se rompt en s'éloignant de la perpendiculaire VX, & par-là les rayons AB, BD qui étoient auparavant divergens deviennent convergens, & se coupent en un point D, la même chose arrive au rayon BF & à tous ceux qui se trouvent entre les rayons BE, BF, de sorte qu'en supposant que l'objet AC soit à une distance convenable pour être vû distinctement, tous les rayons qui partent du point B, & qui entrent dans la prunelle vont tous aboutir à un même point D sur la retine.

Les rayons qui partent du point A & qui traversent la prunelle, souffrent aussi trois réfractions, & vont se réunir à un même point M dans le fond de l'œil, & la même chose arrive à tous les rayons qui partent de tous les points de l'objet AC depuis A jus-

qu'en C, c'eſt pourquoi l'impreſſion que ces rayons font ſur la retine ſe trouve renfermée entre les points N, M où vont ſe joindre les rayons qui partent des extrêmités A, C de l'objet AC, mais dans une poſition renverſée, parce que les rayons qui partent de la gauche AB de l'objet frappent la retine à droite de D en M, & que ceux qui partent de la droite BC du même objet frappent la retine à gauche de D en N.

L'impreſſion faite ſur la retine ſe communiquant au nerf optique paſſe dans le cerveau, & c'eſt alors que notre ame reçoit la perception d'une image ſemblable à celle qui eſt peinte dans la retine, mais qui n'eſt pas renverſée comme elle. Pour expliquer ceci, quelques-uns ont dit que les nerfs optiques ſe renverſent lorſqu'ils paſſent dans le cerveau, de ſorte que l'impreſſion qui ſe fait à gauche dans l'œil ſe fait à droite dans l'endroit où le nerf optique aboutit; mais comme cette réponſe ne leve point toutes les difficultés, & qu'on peut toujours demander comment il ſe peut faire que la lumiere qui eſt un corps venant à ébranler la retine & le nerf optique agiſſe ſur l'ame qui n'eſt qu'un pur eſprit ſur lequel l'action des corps n'a point de priſe; d'autres diſent que c'eſt un méchaniſme admirable que l'Auteur de la Nature a ſagement établi, & par lequel l'ame recevant la perception de l'objet en conſéquence de l'image faite ſur la retine, rapporte cette perception, non pas à l'organe ſur lequel l'image eſt faite, mais à l'objet même qui en eſt la cauſe, à peu près comme nous rapportons la douceur au ſucre lorſque nous en mangeons.

30. Pour ſe convaincre aiſément que les rayons qui paſſent dans le fond de l'œil y forment l'image renverſée des objets dont ils ſont émanés, on n'a qu'à faire l'expérience ſuivante: il faut choiſir une chambre dont les fenêtres donnent ſur quelque place où l'on puiſſe voir beaucoup d'objets à la fois, fermer exactement les fenêtres & les portes de façon qu'il n'entre du jour que par un petit trou pratiqué à l'une des fenêtres, mettre à ce trou un verre convexe du côté de la lumiere, après quoi ſi à l'oppoſite du trou on étend un linge blanc, on ne manquera pas de voir les objets de dehors très-bien deſſinés ſur ce linge, mais dans une poſition renverſée, enſorte que ſi l'on voit par exemple marcher des hommes ou des animaux, ils auront la tête en bas, les pieds en haut, la gauche à la droite, & la droite à la gauche.

Jean-Baptiſte Porta Napolitain, eſt le premier qui s'eſt apperçû de ceci, & après lui un grand nombre de Phyſiciens ſe ſont avi-

sés de construire des yeux artificiels, par le moyen desquels ils ont crû pouvoir expliquer tout ce qui se passe à l'égard de la vision; mais il reste à sçavoir, comme M. de la Hire l'a très-bien remarqué, si toutes les conséquences qu'ils en ont tirées s'accordent avec la nature des choses. Par exemple, ils ont placé le cristallin dans l'œil artificiel, de maniere qu'on pût l'approcher ou l'éloigner du fond de l'œil; après quoi, ayant observé que lorsque les objets étoient trop éloignés de la cornée, il falloit approcher le cristallin du fond de l'œil, afin que la réunion des rayons qui passent à travers ce cristallin se fît précisément sur le fond, & y dépeignît une image bien nette; & qu'au contraire, lorsque les objets étoient trop proches, il falloit éloigner le cristallin du fond de l'œil; les uns ont conclu que le globe de l'œil s'allongeoit pour voir les objets proches, & s'applatissoit pour voir ceux qui sont éloignés; & d'autres ont dit que le cristallin s'applatissoit ou s'arrondissoit, selon que les objets étoient plus éloignés ou plus proches.

La fausseté de ces explications se découvre d'abord, pour peu qu'on fasse attention à la maniere dont l'œil est construit. La cornée est d'une consistance à ne pouvoir devenir ni plus ni moins convexe qu'elle n'est, & la sclerotique est encore plus dure que la cornée; donc, l'œil ne peut ni s'allonger ni s'applatir, ce qui est contre la premiere supposition. Les productions ciliaires qui assujettissent le cristallin n'ont rien qui tienne de la nature du muscle; selon les plus sçavans Anatomistes, elles ne peuvent ni s'allonger ni se raccourcir; donc le cristallin ne peut ni s'éloigner ni s'approcher du fond de l'œil, ce qui est contre la seconde supposition.

Mais, dira-t-on, peut-être; si cela est ainsi, il n'y aura qu'une seule distance à laquelle nous puissions voir un objet bien distinctement; car à mesure que cet objet s'approchera ou s'éloignera de l'œil, les rayons émanés de tous ses points tomberont moins ou plus obliquement sur les humeurs, & leur réunion se fera, ou au-delà de la retine, ou en-deçà; or, selon ce que nous avons dit ci-dessus, la réunion des rayons doit se faire sur la retine afin que l'image soit distincte; donc, lorsque l'objet s'approchera ou s'éloignera de la distance nécessaire pour que la réunion des rayons se fasse sur la retine, nous verrons l'objet confusément: mais ceci est contre l'expérience ordinaire; car nous éprouvons tous les jours qu'un même objet est vû distinctement à differentes

diſtances; donc, il faut néceſſairement, ou que l'œil ſouffre quelque changement de figures, ou que le criſtallin change de place ſelon les occurrences.

Je répons à cela premierement, que les ſuppoſitions impoſſibles ne ſervent de rien pour rendre raiſon de ce qu'on éprouve tous les jours. 2°. Que ſi par le mot de viſion diſtincte, on entend la viſion la plus parfaite qu'on puiſſe avoir d'un même objet, il n'y a point de doute qu'il n'y a qu'une diſtance préciſe & déterminée qui puiſſe cauſer cet effet; mais cela n'empêche point qu'il ne puiſſe y avoir de diſtances plus ou moins grandes dans une certaine étendue auxquelles on puiſſe voir l'objet, non pas à la verité ſi parfaitement, mais d'une maniere aſſez diſtincte pour pouvoir dire qu'on le voit ſans confuſion, ce que j'explique ainſi.

31. Suppoſons que l'objet AC, (*Fig.* 5.) ſoit dans la poſition néceſſaire pour faire qu'il ſoit vû le plus diſtinctement qu'il eſt poſſible; ſi on vient à le rapprocher de l'œil, & qu'on le mette dans la poſition *ac* paralelle à la premiere, tous les rayons qui partent du point *b* & qui paſſent par la prunelle étant plus courts que lorſque le point étoit en B, ſeront moins divergens entr'eux, & tomberont ſur la cornée dans des points plus près de l'axe; ainſi ils ſeront moins obliques ſur les humeurs de l'œil, & ſouffriront de moindres réfractions, & par conſéquent leur réunion ſe fera en un point O au-delà de la retine, & les rayons couperont ſur cette membrane une baſe circulaire RS. Or, il eſt clair que ſi le point O eſt très-proche de la retine, ou qu'il n'en ſoit pas à une diſtance bien éloignée, la baſe RS ſera extrêmement petite, & ne differera pas ſenſiblement d'un point; donc l'ame aura auſſi une perception qui ne ſera pas bien differente de celle d'un point ou de celle qu'elle auroit eu ſi la réunion des rayons s'étoit faite ſur la retine; & comme la même choſe arrivera juſqu'à ce que la baſe RS devienne ſenſiblement trop grande par le trop grand éloignement du point O, il s'enſuit que l'objet AC en ſe rapprochant de l'œil peut être vû aſſez diſtinctement juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à une certaine poſition au-delà de laquelle on ne le verra que d'une maniere très-confuſe.

Maintenant, ſuppoſons que le même objet AC, (*Fig.* 6.) s'éloigne de la poſition où il étoit vû le plus diſtinctement qu'il eſt poſſible, & paſſe dans la poſition *ac*; les rayons du point *b* qui paſſent par la prunelle ſeront plus divergens qu'ils n'étoient auparavant

paravant puisqu'ils seront plus longs, & comme ils tomberont plus obliquement sur la cornée ils souffriront de plus grandes réfractions, & leur réunion se fera en un point O entre la retine & le cristallin; après quoi continuant leur route, ils commenceront à diverger, & couperont sur la retine une petite base circulaire RS. Ainsi cette base sera extrêmement petite si le point O est fort proche ou à une petite distance de la retine, & par conséquent l'ame aura encore une perception qui ne sera pas bien differente de celle d'un point, c'est-à-dire de celle qu'elle auroit eu si la réunion des rayons s'étoit faite sur la retine; & comme la même chose arrivera jusqu'à ce que la base RS devienne sensiblement trop grande, il s'ensuit que l'objet AC en s'éloignant de l'œil peut être vû distinctement jusqu'à une certaine position au-delà de laquelle on ne le verra plus que d'une maniere confuse. Ainsi quoique la vision parfaite ne se fasse qu'à une certaine distance, il y a cependant une certaine étendue dans laquelle l'objet peut s'approcher ou s'éloigner de l'œil & être vû plus ou moins distinctement, selon qu'il s'éloigne moins ou plus de l'endroit où la vision est parfaite.

32. Lorsque nous voyons un objet éloigné, les rayons qui partent de tous ses points sont fort divergens au passage de la prunelle, & par conséquent il y en entre moins, & l'impression qu'ils font sur la retine est plus foible, ainsi l'image est moins vive & moins colorée; au contraire lorsque nous voyons un objet qui est proche de nous, les rayons qui partent de tous ses points étant moins divergens, il en passe davantage par la prunelle, & l'impression faite sur la retine devenant plus grande, l'objet nous paroît plus vif & plus coloré.

33. *Les objets que nous voyons sous des angles égaux font sur la retine des images égales; ceux que nous voyons sous des plus grands angles forment des plus grandes images, & ceux que nous voyons sous des plus petits angles forment des plus petites images.*

Soit l'objet AE vis-à-vis de l'œil, (*Fig.* 7.) de ses extrêmités A, E je mene des droites AC, CE au point *c* où l'axe visuel BD coupe la cornée, & l'angle ACE est l'angle sous lequel l'objet est vû, ou l'angle *visuel.* Supposant donc que tous les rayons qui partent du point A & qui passent par la prunelle aillent se réunir au point M de la retine, & que ceux qui partent du point E aillent se réunir au point N, l'image de l'objet sur la retine sera renfermée dans l'espace NDM. Prolongeons maintenant le rayon

CA indéfiniment en H, & le rayon CE indéfiniment en L, & qu'il se trouve au-delà de AE un objet HL compris entre ces deux rayons prolongés; de tous les rayons qui partent du point H, il y en aura certainement quelqu'un HC qui passera par le point A, & par conséquent ce rayon HC ira frapper la retine au même point M où le rayon AC de l'objet AE l'avoit frappée. Ainsi, comme nous supposons que la vision du point H est distincte, tous les autres rayons qui partent du point H se réuniront en M ou fort peu en-deçà ou en-delà de la retine, ensorte que l'impression ou petite base qu'ils couperont sur la retine sera autour de M, & par la même raison les rayons qui partent de l'autre extrêmité L feront leur impression en N; donc l'image entiere de HL sera encore comprise dans l'espace NDM, & par conséquent elle sera égale à l'image de AE, & ce seroit la même chose s'il se trouvoit dans l'angle visuel HCE un objet HE incliné, & non paralelle aux autres.

Maintenant, soient les deux objets AE, PQ dont le premier est vû sous l'angle ACE plus grand que l'angle PCQ sous lequel l'autre est vû; le rayon PC passant par le point R de l'objet AE va faire son impression sur la retine au même point X où le rayon RC de l'objet AE fait la sienne, de même le rayon QSC fait son impression sur la retine au même point Z où le point S de l'objet AE fait la sienne, & par conséquent l'image de PQ est comprise dans l'espace ZX, & est égale à l'image de la partie RS de l'objet AE laquelle est comprise dans le même espace ZX; or l'image de l'objet AE est plus grande que l'image de sa partie RS, puisqu'elle est renfermée sous un plus grand espace NM. Donc l'image de l'objet AE vû sous un plus grand angle ACE, est plus grande que l'image de l'objet PQ vû sous un plus petit angle PCQ.

34. De-là il suit, 1°. Que si un même objet AB, (*Fig.* 8.) est mis dans differentes positions AB, MN, &c. paralelles entr'elles, l'image qu'il formera sur la retine dans une position plus proche AB sera plus grande que l'image qu'il formera dans une position plus éloignée MN, car l'image qu'il formera dans la position MN sera la même que celle que sa partie RS formoit dans la position AB; or dans la position AB, l'image de la partie RS est plus petite que l'image de tout l'objet AB; donc, &c. 2°. Que si un même objet est mis dans differentes positions qui ne soient pas paralelles entr'elles, il se peut faire qu'il fasse sur la retine une

image plus grande lorſqu'il eſt dans une poſition plus éloignée que ce qu'il fait lorſqu'il eſt dans une poſition plus proche. Car ſi l'angle MCN, (*Fig. 9.*) ſous lequel il eſt vû dans la poſition MN plus éloignée eſt plus grand que l'angle ACB ſous lequel il eſt vû dans la poſition AB plus proche, l'image formée par MN ſera plus grande que l'image formée par AB.

35. Il n'eſt donc pas vrai en géneral que les objets nous paroiſſent plus petits à meſure qu'ils s'éloignent de nous; & au contraire, il eſt toujours vrai de dire que les images qu'ils forment ſont d'autant plus petites que les angles ſous leſquels on les voit ſont moindres.

36. Quoique nous éprouvions ordinairement que les objets nous paroiſſent proportionnels aux images qu'ils forment ſur notre retine, c'eſt-à-dire que nous les voyons plus grands lorſque l'image eſt plus grande, & plus petits lorſqu'elle eſt plus petite; cependant il eſt des occaſions où un même objet qui forme la même image nous paroît tantôt plus grand, tantôt plus petit, en conſéquence de certains jugemens naturels qui ſe forment dans nous ſans que nous y faſſions réflexion : un exemple nous ſuffira pour expliquer ceci.

Suppoſons qu'un objet d'une certaine grandeur ſoit mis dans un eſpace vuide, par exemple dans l'air, & que nous le regardions de façon que l'axe optique lui ſoit perpendiculaire & le coupe dans ſa longueur en deux également. Si cet objet eſt iſolé de toutes parts qu'il n'y ait rien à droite ni à gauche, pardevant ni par derriere, qui puiſſe nous faire juger de ſa diſtance, l'ame s'en tient préciſément à l'image que cet objet forme ſur la retine, & la perception qu'elle en a eſt conforme à cette image. Maintenant, ſuppoſons que ce même objet ſoit poſé perpendiculairement ſur le terrein, que nous le regardions de la même façon, c'eſt-à-dire que l'axe optique lui ſoit perpendiculaire & coupe ſa longueur en deux également; enfin, que la diſtance à laquelle il eſt mis ſoit la même que celle à laquelle il étoit lorſque nous le voyons dans l'air, il eſt viſible que l'angle ſous lequel nous le voyons dans l'une & l'autre poſition ſera la même, & que par conſéquent les deux images formées ſur la retine dans ces deux poſitions ſeront égales. Cependant s'il ſe trouve entre l'œil & cet objet mis ſur le terrein à gauche & à droite d'autres objets qui puiſſent faire juger de ſa diſtance, alors l'ame le jugeant moins éloigné dans cette ſeconde poſition que dans la précédente, s'en

forme une perception plus grande qu'auparavant par l'habitude où nous sommes de voir qu'un objet toujours perpendiculaire à l'axe optique nous paroît plus grand quand il est plus près que lorsqu'il est plus loin : ainsi voilà deux perceptions differentes, quoique l'image de l'objet soit toujours la même. Ce n'est pas tout, supposons encore que cet objet étant dans la même position sur le terrein, il se trouve entre l'œil & lui un mur au-dessus duquel nous voyons l'objet sans voir ce qui se trouve entre l'objet & le mur; alors l'image du mur & celle de l'objet étant contigues sur la retine, & l'ame n'appercevant rien qui puisse lui faire juger que le mur & l'objet sont éloignés l'un de l'autre, elle juge qu'ils se touchent; ainsi, à cause qu'elle croit l'objet moins distant qu'elle ne le jugeoit auparavant, elle s'en forme une perception plus grande que celle qu'elle se formeroit si le mur n'étoit pas entre deux. D'où l'on voit qu'on peut avoir d'un même objet qui forme toujours la même image, une infinité de perceptions differentes; car selon que le mur interposé sera plus proche de l'œil, la perception de l'objet vû par-dessus deviendra plus grande.

Ces jugemens que l'ame fait dans ces occasions sont, comme j'ai déja dit, des jugemens naturels qui se forment dans nous sans aucune réflexion de notre part, & qui sont toujours faux par le défaut des conditions que l'ame y met; ainsi nous aurions grand tort de les suivre, & de vouloir juger des grandeurs ni des distances des objets par ces sortes de perceptions.

37. Le Pere Lami de l'Oratoire dans son Traité de Perspective, prétend que pour bien représenter les objets sur un tableau, il faut avoir égard non-seulement à la grandeur des images qu'ils forment sur la retine en les représentant sous les mêmes angles sous lesquels nous le voyons, suivant les regles que nous enseignerons plus bas, mais encore aux differentes perceptions que l'ame se forme dans certaines occasions. Or en cela il se trompe très-fort; car lorsqu'on représente les objets dans un tableau, on les représente avec toutes leurs circonstances, le tout sous les mêmes angles, c'est pourquoi si l'objet est isolé, il le sera aussi dans le tableau, & l'ame ne pourra pas faire plus de jugement sur sa distance en le voyant dans le tableau, qu'elle n'en feroit si elle le voyoit dans l'air, puisque l'image sera toujours la même; si l'objet est environné d'autres objets qui fassent juger de sa distance, il le sera aussi dans le tableau, & les jugemens que l'ame

portera, soit sur le tableau, soit sur le terrein, seront encore les mêmes, puisque les angles seront les mêmes & les images aussi, & que la comparaison de ces différentes images sera toujours la même; soit que ces images viennent des objets sur le terrein ou des objets sur le tableau. Il arriveroit même, si l'on vouloit suivre le sentiment de cet Auteur, que sous prétexte de vouloir faire paroître aux yeux les objets conformément aux perceptions que l'ame s'en forme, nous les représenterions sous des angles différens de ceux sous lesquels on les voit, ce qui formeroit sur notre retine des images différentes de celles que les objets forment, & de-là l'ame prendroit occasion de s'en former des perceptions bien différentes de celles que nous voudrions lui attribuer. La véritable régle est de représenter les objets dans le tableau sous les même angles, sous lesquels on les voit; de mettre ensuite le tableau devant les yeux, de façon que les angles sous lesquels ils sont peints tombent sur les angles sous lesquels ils sont vûs sur le terrein; & dès-lors les objets nous paroîtront sur ce tableau de la même façon qu'ils sont vûs sur le terrein, & l'ame en portera les mêmes jugemens; ainsi la représentation sera parfaite, surtout si on a l'art d'y mettre les diminutions des couleurs, selon les différens éloignemens. Tout ceci sera mieux expliqué en détail dans la suite, & j'espére faire voir qu'il n'y a rien de si dangereux pour les Sciences que d'y mêler certains raisonnemens captieux, qui sous prétexte d'être fondés sur des principes mal appliqués, nous jettent dans l'erreur.

38. Lorsque nous regardons fixement sans détourner la vûe de côté ni d'autre, tout ce que nous voyons est compris sous un angle droit, c'est-à-dire que si au point C (*Fig.* 10.) où l'axe optique traverse la cornée, on fait de part & d'autre de cet axe deux angles MCB, NCB de 45 degrés, lesquels formeront ensemble un angle droit MCN, il n'y aura que les objets compris sous les jambes CM, CN prolongées indéfiniment qui seront vûs distinctement, supposé qu'ils ne soient ni trop proches ni trop éloignés. On peut s'assurer de ceci par l'expérience; car si l'on met un équerre à angle droit devant ses yeux, on éprouvera qu'on ne voit clairement que ce qui est compris sous cet angle, & la raison en est évidente par la conformation de l'œil. Car si l'on prolonge au-delà de l'angle droit un objet MN qui y est compris, tous les rayons qui partiront du point H hors de cet angle tomberont avec beaucoup d'obliquité sur la cornée, & par consé-

quent il y en aura très-peu qui pafferont par la prunelle, & ceux qui y pafferont iront frapper la retine fi obliquement que leur impreffion ne fera prefque pas fenfible.

39. De ce que les rayons qui frappent trop obliquement la retine y font des impreffions plus foibles que ceux qui la frappent moins obliquement; il s'enfuit que l'image d'un objet qui eft plus ramaffée dans une certaine proportion autour du point D où l'axe optique coupe la retine, eft vûe plus parfaitement dans toutes fes parties qu'un autre image du même objet qui feroit plus étendue; & de-là on peut voir de quelle utilité font les différentes humeurs que l'Auteur de la Nature a fi fagement difpofées dans l'œil, car ces humeurs ne fervent pas feulement à nourrir & à humecter l'œil pour l'empêcher de fe deffecher, comme on pourroit croire; mais encore à diminuer les images des objets par les refractions que les rayons fouffrent, à les rendre par conféquent plus fenfibles, & à faire que nous puiffions voir de très-grands objets.

Principes néceffaires pour la pratique de la Perfpective.

40. Lorfque nous fommes dans une grande plaine qui n'eft terminée par aucune montagne, le Ciel & la Terre nous paroiffent fe réunir en une même ligne, qui nous paroît en tournant autour de nous la circonférence CDEF (*Fig.* 11.) d'un cercle dont le centre A eft dans nos yeux; & le terrein compris entre nos pieds & cette circonférence qu'on nomme *Horizon*, nous paroît former la furface d'un cône dont le fommet B eft à nos pieds, & dont la bafe eft le cercle CDEF. Que fi nous nous élevons au deffus du terrein en montant, par exemple, en haut d'une Tour, l'horizon nous paroîtra encore la circonférence d'un cercle dont nos yeux feront le centre, & le terrein compris entre le pied de la Tour, & la circonférence nous paroîtra la furface d'un cône renverfé dont le fommet fera le pied de la Tour, & fa hauteur fera égale à la diftance du pied de la Tour à nos yeux; de forte que le plan de l'horizon paroît s'élever quand nous nous élevons, & s'abaiffer quand nous nous baiffons.

Lorfque nous fommes debout, le plan de l'horizon paffant par nos deux yeux eft perpendiculaire à notre pofition, de même que le terrein fur lequel nous fommes; ainfi le terrein & le plan de l'horizon font paralelles entr'eux, quoiqu'ils nous paroiffent fe couper.

41. Lorsque nous regardons fixement sans tourner autour de nous, ni jetter les yeux de part & d'autre, la partie du plan horizontal que nous voyons est un quart de cercle, puisque notre vûe est renfermée dans les bornes d'un angle droit (*N.* 38.); mais alors l'arc de ce quart de cercle étant extrêmement grand & fort éloigné, nous paroît une ligne droite HG (*Fig.* 12.), laquelle avec les côtés égaux AH, AG de l'angle droit visuel HAG, forme un triangle rectangle isoscele, dont les angles H, G sur la base sont par conséquent égaux & de 45 degrés; & comme l'axe optique AC fait avec ces côtés AH, AG des angles qui sont aussi chacun de 45 degrés (*N.* 38.); il s'ensuit que les triangles APH, APG que cet axe optique forme, sont aussi de triangles rectangles isosceles & égaux; ainsi on a AP = HP = GP, c'est-à-dire que si du centre A de l'œil, on mene une droite AP, perpendiculaire sur l'horizon HG, cette droite coupera la droite HG en deux parties HP, PG égales entr'elles & à la distance AP de l'œil à l'horizon.

La droite HG se nomme *Ligne horizontale*, la droite AP est le *Rayon principal*, le point P se nomme *Point de vûe*, & les points H, G se nomment *Points de distance*, parce qu'ils nous servent à déterminer dans le tableau les apparences des distances des objets que nous voyons sur le terrein.

42. *Si deux triangles* ABC, ADC (Fig. 13.) *ont les bases égales, mais que les côtés* AB, BC *du premier soient chacun plus petits que les côtés* AD, DC *du second, l'angle au sommet* B *du premier est plus grand que l'angle au sommet* D *du second.*

Je mets les deux bases l'une sur l'autre, de façon que le plus grand côté AD du second triangle tombe du côté du plus grand côté AB du premier, & je décris autour du premier triangle ABC un cercle ABPC. 1°. L'angle ADC ne peut pas être à la circonférence du cercle; par exemple, en P, car si cela étoit le côté CD tomberoit sur la corde CP, & comme cette corde est plus petite que la corde CB, à cause qu'elle soutient un arc moindre, il s'ensuivroit que le côté CP ou CD du triangle ADC seroit plus petit que le côté CB du triangle ABC, ce qui est contre la supposition. 2°. Le sommet D du triangle ADC ne peut pas tomber dans le cercle entre la circonférence & le côté BC; car s'il étoit en R, le côté CD tomberoit sur la droite CR, & prolongeant CR en T la corde CT seroit plus petite que la corde CB qui soutient un plus grand arc; & à plus forte raison CR,

c'eſt-à-dire CD feroit moindre que CB, ce qui eſt encore contre la ſuppoſition 3°. Le ſommet D ne peut pas tomber en dedans du triangle ABC. Par exemple, en S, car ſi cela étoit le côté CD tomberoit ſur la droite CS, & les deux côtés AS, SC, c'eſt-à-dire les côtés AD, CD du triangle ADC feroient enſemble plus petits que les côtés AB, CB qui prennent un plus grand détour entre leurs extrêmités A, C. Il faut donc néceſſairement que le ſommet D ſoit hors du cercle ABPC; or, l'angle ABC à la circonférence vaut la moitié de l'arc AC qu'il embraſſe, & l'angle ADC étant hors du cercle vaut la moitié de l'arc concave AC qu'il embraſſe, moins la moitié de l'arc convexe XC qu'il coupe. Donc l'angle ADC eſt moindre que l'angle ABC.

43. S'il ſe trouve dans le plan du terrein pluſieurs lignes égales & paralelles AB, CD (*Fig.* 14.); celles qui ſe trouveront plus éloignées de l'œil O du ſpectateur feront vûes ſous des moindres angles que celles qui feront plus proches, car puiſque CD eſt plus éloignée de l'œil que AB, la droite DO eſt plus grande que la droite BO, & la droite CO plus grande que la droite AO; or, les baſes CD, AB des triangles COD, AOB ſont égales; donc l'angle au ſommet de celui qui a les plus grands côtés eſt plus petit que l'angle au ſommet AOB de l'autre (*N.* 42.).

Delà il ſuit que les lignes égales & paralelles ſur le terrein, forment dans l'œil des images d'autant plus petites qu'elles ſont plus éloignées, & que par conſéquent s'il s'en trouvoit une qui fût à la plus grande diſtance poſſible, c'eſt-à-dire à l'horizon, elle feroit vûe ſous l'angle le plus petit ſous lequel on puiſſe la voir, & ſon image feroit la plus petite poſſible & ne differeroit pas d'un point.

La même choſe doit ſe dire de pluſieurs lignes égales & paralelles qui feroient élevées à plomb ſur le terrein, & de toutes les lignes égales & paralelles qui feroient dans un plan paralelle au plan de l'horizon & ſupérieur à ce plan, &c.

44. Si pluſieurs lignes *ab*, *cd* (*Fig.* 15.) menées ſur le terrein, ſont paralelles entr'elles, mais inclinées à la ligne TV qui paſſe par nos pieds ou à quelque ligne AB paralelle à la ligne TV, toutes ces lignes *ab*, *cd*, &c. nous paroiſſent aller aboutir à un même point de l'horizon. Nous éprouvons tous les jours qu'une longue allée nous paroît ſe retrecir à meſure qu'elle s'éloigne de nous : que les murs d'une longue ſale ſemblent ſe rapprocher vers le fonds, &c. La même choſe arriveroit auſſi ſi ces lignes étoient

étoient élevées au-dessus du plan de l'horizon. Or, pour trouver le point de l'horizon où ces lignes paroissent aboutir, il faut mener du point de l'œil H une ligne H*h* paralelle aux lignes *ab*, *cd*, &c. & le point de l'horizon où cette ligne aboutira sera le point où toutes les autres *ab*, *cd*, &c. paralelles à H*h*, nous paroîtront aller aboutir, soit qu'elles soient sur le terrein ou au-dessus du plan de l'horizon.

Pour faire entendre ceci clairement, concevons que le plan ABCD (*Fig.* 16.) represente le terrein que nous voyons devant nous prolongé jusqu'à l'horizon; que la ligne AB soit la ligne qui passe par le pied du spectateur dont la position est en P; que la droite PO perpendiculaire sur le terrein soit la hauteur de l'œil dont la position est en O, & que sur le terrein soient menées des droites MN, RS, &c. perpendiculaires à la droite AB. Concevons aussi que par l'œil O il passe un plan EFGH paralelle au plan du terrein, & qui sera par conséquent le plan de l'horizon, que la ligne EF soit paralelle à la ligne AB qui passe par les pieds P, & que du point O soit menée dans le plan de l'horizon la droite OV perpendiculaire sur EF, laquelle sera l'axe optique ou le rayon principal, puisqu'elle sera perpendiculaire sur la ligne horizontale HG, laquelle est paralelle à EF; enfin, du point P menons dans le plan du terrein la droite PT perpendiculaire sur AB, & par conséquent paralelle aux droites MN, RS, &c. Cela posé.

Les plans ABCD, EFGH étant paralelles entr'eux la droite PO perpendiculaire sur le plan ABCD est aussi perpendiculaire sur le plan EFGH, & partant elle est perpendiculaire sur les droites PT, OV qui sont dans ces plans, & qui les coupent en P & en O. Ainsi les droites PT, OV sont paralelles entr'elles; c'est pourquoi, si nous concevons que la droite PO se meuve toujours paralellement à elle-même en allant vers l'horizon, elle sera toujours renfermée entre les droites PT, OV; or, à mesure que PO s'éloignera de l'œil O elle paroîtra toujours plus petite jusqu'à ce qu'étant arrivée à l'horizon elle ne paroîtra plus que comme un point; ainsi l'image qu'elle formera alors sur la retine ne sera pas différente de celle que le point de vûe V, y forme; mais la ligne PO en s'éloignant de l'œil ne peut pas paroître diminuer à moins que les paralelles OV, PT entre lesquelles elle est toujours comprise ne paroissent s'approcher l'une de l'autre, & la ligne OV qui est l'axe optique ne peut pas nous paroître changer de position;

donc il faut que ce soit la ligne PT qui nous paroisse aller se terminer au point de vûe V. Maintenant les droites PT, MN étant paralelles entr'elles ; si nous concevons que la droite PM se meuve toujours paralellement à elle-même, elle sera toujours comprise entre les paralelles PT, MN, & comme à mesure qu'elle s'éloignera de l'œil, elle paroîtra toujours plus petite jusqu'à ce qu'étant arrivée à l'horizon, son image ne sera plus qu'un point, il est clair que les paralelles PT, MN nous paroitront s'aller réunir en un même point ; or, nous venons de voir que la droite PT doit nous paroître aller aboutir au point de vûe V ; donc la droite MN doit nous paroître aller aboutir au point de vûe V, & ainsi des autres ; d'où il suit que toutes les lignes menées sur le terrein paralelles entr'elles & perpendiculaires à la droite AB qui passe par le pied du spectateur paroissent aller aboutir au point de vûe V, c'est-à-dire au point où le rayon OV paralelle à ces droites coupe l'horizon.

De même, supposons que sur le terrein soient menées des droites *mn*, *rs* paralelles entr'elles, & qui fassent avec la ligne AB qui passe par les pieds du spectateur un angle de 45 degrés ; je mene du centre de l'œil dans le plan de l'horizon une droite OG paralelle aux droites *mn*, *rs*, &c. & à cause que la droite EF qui passe par les yeux est paralelle à la droite AB qui passe par les pieds & que OG est paralelle à *mn*, l'angle GOF est aussi de 45 degrés, & partant l'angle GOV est de 45 degrés, à cause que l'angle VOF est droit ; ainsi la ligne OG va aboutir sur la ligne horizontale à l'un des points de distance. Je mene sur le terrein par les pieds P une droite indefinie P*p* paralelle aux droites *mn*, *rs*, & par conséquent paralelle à OG ; & concevant que la ligne OP comprise entre les deux paralelles OG, P*p*, se meuve toujours paralellement à elle-même en allant vers l'horizon, cette droite en s'éloignant paroîtra toujours plus petite jusqu'à ce qu'étant arrivée à l'horizon, son image ne sera plus qu'un point, & cette image sera la même que celle du point de distance G ; c'est pourquoi les deux lignes OG, P*p* entre lesquelles OP étoit comprise paroîtront se couper au point G. Maintenanr les lignes P*p*. *rs* étant paralelles sur le terrein, si l'on conçoit que la ligne *r*P comprise entre ces paralelles se meuve toujours paralellement à elle-même entre ces droites, elle nous paroîtra diminuer à rout moment à mesure qu'elle s'éloignera, de façon qu'étant arrivée à l'horizon elle ne paroîtra plus que comme un point, auquel les

deux lignes P*p*, *rs* paroîtront se couper. Or, nous venons de voir que P*p* paroît aboutir en G, donc *rs* paroîtra aussi aboutir au même point G, & ainsi des autres ; d'où il suit que toutes les lignes paralelles sur le terrein qui font avec la ligne AG qui passe par les pieds P un angle de 45 degrés, paroissent toutes aller aboutir sur l'horizon à l'un des points de distance.

Et on prouvera de la même maniere que toutes les paralelles menées sur le terrein, & qui font avec la ligne qui passe par les pieds D un angle quelconque paroissent toutes aller aboutir au point de l'horizon où aboutiroit un rayon mené de l'œil paralellement aux droites du terrein ; & ce seroit encore la même chose si ces paralelles étoient dans un plan paralelle au plan de l'horizon, & qui fût au-dessus de ce plan. Tel, par exemple, qu'est le plancher supérieur d'une longue sale, à l'entrée de laquelle le spectateur se trouveroit.

45. Si l'on conçoit qu'entre le spectateur & les objets qu'il regarde sur le plan AB*q*Q du terrein (*Fig.* 17.), il se trouve un plan CDEF transparent, qui soit perpendiculaire sur le terrein en une droite CD paralelle à la droite AB qui passe par les pieds P du spectateur, ensorte que ce plan soit à une certaine distance de l'œil O. Je dis que si de tous les points des objets qui sont sur le terrein en-delà de ce plan, on mene des lignes droites à l'œil O, lesquelles en coupant le plan CDEF y laissent leur impression, & qu'on conçoive ensuite que ce plan cesse d'être transparent, toutes les impressions que les rayons visuels auront faites sur ce plan, formeront dans l'œil les mêmes images qu'y formoient auparavant les objets d'où ces points émanent, & l'œil verra les objets sur le tableau de la même façon qu'il les voyoit sur le terrein.

Soit, par exemple, le triangle *abc* (*Fig.* 18.) décrit sur le terrein, les rayons qui partent de tous les points de la ligne *ab*, & qui vont aboutir à l'œil O, forment un triangle *a*O*b*, lequel est une surface plane, de même que le plan ou tableau CFED qu'il coupe ; or, deux surfaces planes qui se coupent, se coupent en une ligne droite ; donc la ligne *de* dans laquelle le triangle visuel *a*O*b* coupe le tableau CFED est droite ; mais cette ligne est comprise dans le même angle *a*O*b* formé par les mêmes rayons *a*O, *b*O ; donc l'image de cette ligne *de* dans l'œil est précisément la même que celle de la ligne *ab*. On prouvera de même que les rayons menés de tous les points du côté *ac* à l'œil O coupent le

tableau en une ligne *df* comprise sous le même angle visuel *aoc*, & qui par conséquent forme dans l'œil la même image que la ligne *ac*, & que les rayons qui portent de tous les points de la ligne *cb* coupent aussi le tableau en une ligne *fe* qui forme dans l'œil la même image que la ligne *cb*. Ainsi puisque le contour du triangle *def* forme dans l'œil une image précisément égale à celle du contour *acd*, & qui est placée sur la retine de la même façon; le triangle *def*, c'est-à-dire son aire formera aussi la même image que celle de l'aire du triangle *abc*, & l'œil verra l'un & l'autre de la même façon; & il en est de même de tout autre objet qui seroit dans le plan du terrein, ou perpendiculaire à ce plan, ou élevé au-dessus, & qui seroit au-delà du tableau par rapport à l'œil.

46. L'axe optique OV (*Fig.* 19.) coupe le plan du tableau CFED en un point R qui est l'apparence du point de vûe V; car le point V & le point R étant sur le même rayon visuel O, ne forment sur la retine qu'une même & seule image.

47. Si dans le plan de l'horizon on fait de part & d'autre deux angles SOR, TOR de 45 degrés, les points S, T, où les côtés SO, TO coupent le tableau seront les apparences des deux points de distance de la ligne horizontale; car ces rayons OS, OT étant prolongés jusqu'à l'horizon iroient aboutir aux points de distance (*N.* 41.); ainsi ces points étant sur les mêmes rayons que les points S, T, l'image de ceux-ci sur la retine est précisément la même que celle des points de distance.

48. Donc la ligne droite SRT menée dans le tableau par les points S, R, T est l'apparence de la ligne horizontale, car cette ligne SRT est vûe sous le même angle droit TOS, sous lequel la ligne horizontale est comprise, & par conséquent l'image de l'une est précisément la même que l'image de l'autre.

49. L'apparence SRT de la ligne horizontale est paralelle à la base CD du tableau, c'est-à-dire à la droite CD, dans laquelle le tableau coupe le plan du terrein; car le triangle visuel TOS est dans le plan de l'horizon, lequel est paralelle au plan du terrein; or, le tableau est coupé par ces deux plans aux lignes ST, CD; donc ces deux lignes sont paralelles.

50. Si plusieurs lignes indéfinies MN, X*x* (*Fig.* 20.) menées sur le terrein, sont paralelles entr'elles & perpendiculaires à la base CD du tableau qu'on nomme ordinairement *Ligne de terre;* les apparences de ces lignes seront les droites MR, XR, menées

des points M, X où elles coupent le tableau au point R qui est l'apparence du point de vûe, car la ligne indéfinie X*x* étant perpendiculaire sur la ligne de terre CD, est aussi perpendiculaire à la ligne AB qui passe par les pieds P, & qui est paralelle à CD. Donc la ligne X*x* nous paroît aller aboutir au point de vûe V (*N.* 44.); ainsi l'œil voit cette ligne sous l'angle VOX formé par le rayon principal VO, & par le rayon OX; or, la ligne XR sur le tableau est vûe sous le même angle formé par les mêmes rayons; donc l'image de la ligne XR dans l'œil est la même que celle de la ligne X*x*, & ainsi des autres.

51. Si l'on mene sur le terrein plusieurs lignes indefinies MN, X*x* (*Fig.* 21.) paralelles entr'elles, & qui fassent avec la ligne de terre CD des angles NMD, *x*XD de 45 degrés, les apparences de ces lignes sur le tableau seront les droites MT, XT menées des points M, X au point T qui est l'apparence du point de distance vers lequel ces lignes MN, X*x* prennent leur route; car la droite MN, faisant un angle de 45 degrés avec CD fait aussi un même angle avec la droite AB, & par conséquent elle paroît aller aboutir au point de distance qui est de ce côté-là (*N.* 44.), & auquel le rayon OT va aboutir; ainsi l'œil voit la ligne MN sous l'angle TOM fait par le rayon OT qui iroit aboutir au point de distance, & par le rayon OM; or, la ligne MT est vûe sous le même angle. Donc, &c.

52. Pour trouver dans le tableau l'apparence d'une ligne indefinie MN (*Fig.* 22.) menée sur le terrein, & qui fait avec la ligne de terre CD un angle NMD différent de l'angle de 45 degrés. Je mene par les pieds P une droite PQ qui fasse avec la ligne de terre CD l'angle PQM égal à l'angle NMD; au point Q, j'éleve sur CD, & dans le plan du tableau la perpendiculaire QL, & du point L où elle coupe la ligne ST qui est l'apparence de la ligne horizontale; je mene la droite LM qui sera l'apparence de la droite indefinie MN. Car menant dans le plan de l'horizon la ligne OL, les droites OP, QL perpendiculaires sur le terrein, & comprises entre le plan du terrein & celui de l'horizon sont paralelles & égales entr'elles; ainsi les droites OL, PQ sont aussi paralelles; c'est pourquoi si on les conçoit prolongées jusqu'à l'horizon, elles paroîtront se couper au même point où OL coupera l'horizon, & la droite MN étant paralelle à PQ paroîtra aussi aboutir au même point, & sera vûe sous l'angle LOM, formé par le rayon OL, & par le rayon OM; or, ML est vûe sous le

même angle ; donc ML est l'apparence de la ligne MN, & ainsi des autres.

Le point L où la droite MN & toutes ses paralelles paroissent se couper dans le tableau, est nommé *Point accidental* par quelques Auteurs.

53. Si une droite MN menée sur le terrein (*Fig.* 23.) est paralelle à la ligne de terre CD, son apparence *mn* dans le tableau est aussi paralelle à CD ; car concevant que sur MN soit mis un plan MNPQ perpendiculaire sur le terrein, ce plan sera paralelle au plan CDEF du tableau qui est aussi perpendiculaire sur le terrein, & dont la base CD est paralelle à la base MN ; or, ces deux plans paralelles coupent le triangle visuel MON l'un en MN & l'autre en *mn*; donc ces deux lignes MN, *mn* sont paralelles entr'elles, mais MN est paralelle à CD, donc *mn* l'est aussi, & on prouvera la même chose de toute ligne paralelle à la ligne de terre, soit qu'elle soit sur le terrein ou élevée au-dessus.

54. Si une droite PN est perpendiculaire sur le terrein, son apparence P*n* (*Fig.* 23.) dans le tableau est perpendiculaire sur la ligne de terre CD ; car menant par PN un plan MNPQ perpendiculaire sur le terrein & paralelle au tableau. Je prouverai, comme ci-devant, que l'apparence *mn* de la ligne MN est paralelle à cette ligne, & à cause que les deux plans paralelles MNPQ, CDEF coupent le triangle visuel PON aux droites NP, *np* ; je prouverai aussi que les droites *np*, NP sont paralelles. Concevant donc que l'angle *mnp* glisse le long de ON ; ensorte que *mn* soit toujours paralelle à MN, & *pn* à PN. Il est clair que quand le sommet *n* sera parvenu en N, la droite *mn* tombera sur la direction de MN, la droite *np* sur la direction de NP, & que les deux angles seront égaux ; or, l'angle MNP est droit ; donc l'angle *mnp* l'est aussi ; & partant *np* est perpendiculaire sur *mn*, mais *mn* est paralelle à CD ; donc *np* est aussi perpendiculaire sur CD.

55. Si une ligne MN (*Fig.* 24.) tracée sur le terrein paralellement à la base CD est coupée en parties égales MP, PQ, QN, son apparence *mn* sur le tableau sera aussi coupée en parties égales *mp*, *pq*, *qn*.

Les triangles OMP, O*mp* sont semblables à cause des bases paralelles MP, *mp* ; donc MP. *mp* :: PO. *po* ; or, les triangles semblables POQ, *poq* donnent PQ. *pq* :: PO. *po* ; donc MP. *mp* :: PQ. *pq*, ou MP. PQ :: *mp*. *pq* ; mais par la construction nous

avons MP = PQ, donc *mp* = *pq*, & on prouvera de même que *pq* = *qn*.

56. Si la ligne MN diviſée en pluſieurs parties égales étoit perpendiculaire ſur le terrein, ſon apparence dans le tableau ſeroit auſſi coupée en parties égales, ce qui ſe démontre de la même façon. Et il faut dire la même choſe des lignes élevées en l'air & qui ſeroient paralelles à CD.

57. Plus le tableau CDEF eſt proche de l'œil, plus l'apparence des objets dans ce tableau devient petite, ce qui eſt évident, car on voit bien que ſi le tableau CDEF coupe le triangle viſuel PON plus près du ſommet O, l'apparence *pn* de la droite PN ſera plus petite qu'elle ne ſeroit ſi le même tableau coupoit le même triangle plus près de l'objet PN, & ainſi des autres.

58. L'apparence ſur le tableau d'une ligne droite MN ou NP (*Fig.* 23.) qui eſt ſur le terrein, ou dans un plan différent du plan de l'horizon, eſt toujours une ligne droite; ce qui eſt encore évident, car le triangle viſuel MON ou NOP étant un plan, la ligne *mn* ou *np* dans laquelle il coupe le tableau eſt une ligne droite. Mais l'apparence des lignes droites menées dans le plan de l'horizon, & qui paſſent par l'œil n'eſt qu'un point, car chacune de ces lignes ne coupe le tableau qu'en un point, de même que leur image dans la retine n'eſt qu'un point.

59. Je nommerai *Ligne principale* la ligne PM (*Fig.* 20.) menée du pied P du ſpectateur paralellement au rayon principal OR. Si cette ligne PM eſt conçue prolongée juſqu'à l'horizon, ſon apparence dans le tableau eſt, comme nous avons dit ci-deſſus, la droite MR menée du point M à l'apparence R du point de vûe, & cette droite MR eſt perpendiculaire ſur la ligne CD, & ſur l'apparence ST de la ligne horizontale.

Pratique de la Perſpective.

60. Les objets qu'on veut repréſenter ſont, ou des lignes tracées ſur le terrein, & qui y forment différentes figures, ou des lignes élevées ſur le terrein, & qui forment différens corps, ou enfin, des lignes qui ſont dans l'air, & qui forment ou des figures ou des corps.

De la maniere de représenter les Figures qui sont sur le Plan du Terrein.

61. Les apparences dans le tableau des différentes lignes ou figures qui sont sur le terrein dépendent des différentes positions que ces grandeurs ont entr'elles sur le terrein, & de leurs différentes distances; ainsi il faut avant tout avoir le plan de ce qu'on veut représenter, & son échelle; ensuite on doit déterminer de quel côté on veut le voir, & quelle doit être la hauteur de l'œil au-dessus du terrein, ce qui demande beaucoup de choix & de goût, étant certain que le tableau devient plus ou moins gracieux, selon les différens aspects des objets.

Supposons donc que le rectangle ABCD (*Fig.* 25.) soit le plan d'un terrein sur lequel on a tracé différentes figures qu'on veut représenter, & qu'on se soit déterminé de le voir du côté AB, ensorte que la ligne MN soit la ligne principale, & que le côté AB soit la ligne de terre, c'est-à-dire sur laquelle le tableau doit être perpendiculaire; je fais en A & B les angles RAB, RBA chacun de 45 degrés; & il est clair que si je veux voir d'un coup d'œil tout ce qui est dans le plan; je ne puis pas me mettre plus proche du tableau qu'au point R où l'angle visuel ARB est droit, car si j'en approchois davantage comme en S l'angle visuel ASB deviendroit obtus, & tous les objets qui seroient proches des extrêmités A, B du plan ne formeroient que des images très-confuses dans mon œil. Or, comme les objets vûs sous un angle droit ARB forment dans notre œil une image très-étendue dont les extrêmités A, B ne sont pas vûes bien distinctement, si je m'éloigne un peu plus. Par exemple, en T, ensorte que l'angle visuel devienne raisonnablement aigu sans l'être trop. Je verrai beaucoup mieux les objets qui sont dans le plan. Mais en ce cas, il faut ou que la base du tableau soit plus grande que la ligne AB, ou que les points de distance se trouvent hors du tableau, c'est-à-dire dans le plan du tableau prolongé. Car les apparences des points de distance doivent toujours être autant éloignées de l'apparence du point de vûe qui est au-dessus du point N dans le tableau, que le tableau est éloigné de l'œil; c'est à-dire qu'en supposant que je veuille être en T, & que le point de vûe sur le tableau fût le point N, il faut que je fasse NH & NL chacune égale à TN pour avoir les points de distance sur le plan du tableau.

La

La largeur du tableau étant déterminée selon la distance de l'œil à laquelle on veut qu'il se trouve, supposons que ce tableau soit le plan *abcd*, sa base *ab* sera donc égale à la ligne AB du plan, si on a choisi d'en représenter les objets sous l'angle droit, & elle sera plus grande si on a choisi un angle moindre. Pour le présent, supposons *ab* = AB; je prens sur le côté *bc* une partie *bh* égale à la hauteur de l'œil au-dessus du terrein, en me servant des mesures de l'Echelle du plan, & par le point *h* je mene la droite *hl* paralelle à la ligne *ab*; je divise *hl* en deux également en *r*, & du point *r* je mene sur la base la perpendiculaire *rn*; ainsi la ligne *hl* sera l'apparence de la ligne horizontale, le point *r* sera l'apparence du point de vûe, les points *h*, *l* seront l'apparence des points de distance; enfin la ligne *rn* sera l'apparence de la ligne principale NM prolongée jusqu'à l'horizon; car si l'on conçoit que le tableau *abcd* soit mis perpendiculairement sur la ligne de terre AB du plan, ensorte que le point *n* tombe sur le point N, & que le spectateur soit en R, de façon que son œil soit élevé au-dessus du terrein d'une quantité égale à *bh*, on jugera aisément par les regles établies ci-dessus, que toutes ces apparences seront précisément les mêmes que nous venons de dire. Tout ceci posé, passons à la solution des Problemes.

62. **Probleme.** *Trouver sur le Tableau l'apparence d'un point donné* P *sur le Plan.* (Fig. 25.)

Du point P je mene sur AB la perpendiculaire PQ; je prens avec le compas la distance QN du point Q à la ligne principale NM, je la porte sur la base du tableau de *n* en *q*, & je mene la droite *qr* à l'apparence *r* du point de vûe; je prens de même la distance PQ du point P à la ligne de terre AB, & la portant sur la base du tableau de *q* en *x*, je mene au point *l* qui est l'apparence du point de distance opposé la droite *xl*, & le point *p* où cette droite coupe la droite *rq* est l'apparence sur le tableau du point P qui est sur le plan, ce que je prouve ainsi.

Je prens sur la ligne de terre AB la droite QX égale à la perpendiculaire QP, & je mene la droite XP, ce qui donne le triangle rectangle isoscele PQX dont les angles QPX, QXP sont chacun de 45 degrés; je conçois que le tableau soit mis perpendiculairement sur la droite AB & sur le plan ABCD, de façon que les points *n*, *q*, *x* tombent sur les points N, Q, X, il est clair que si le spectateur est en R & que son œil soit élevé au-dessus de ce point d'une quantité égale à *nr*, la droite QP du plan

prolongée jusqu'à l'horizon lui paroitroit aller aboutir au point de vûe à cause qu'elle est perpendiculaire sur la ligne de terre, (*N.* 44.) & la droite XP prolongée aussi jusqu'à l'horizon lui paroîtroit aller aboutir au point de distance opposé à l'angle QXP à cause qu'elle fait un angle de 45 degrés avec la ligne de terre, (*N.* 44.) donc l'apparence sur le tableau de la ligne PQ prolongée doit être la droite *qr*, (*N.* 50.) & l'apparence de la ligne XP prolongée doit être *xl* (*N.* 51.) or le point P du terrein est sur l'intersection des droites QP, XP; donc l'apparence de ce point dans le tableau doit être le point d'intersection des apparences *qr*, *xl* de ces lignes.

63. Il suit de-là que pour trouver sur le tableau l'apparence d'un point quelconque P, il n'y a qu'à chercher la distance PZ ou NQ de ce point à la ligne principale NM, & la distance PQ de ce même point à la ligne de terre AB; car portant la premiere sur la base du tableau de *n* en *q*, & l'autre de *q* en *x*, & menant du point *q* la droite *qr* à l'apparence *r* du point de vûe, & du point *x* la droite *xl* à l'apparence *l* du point de distance opposé, l'intersection des deux lignes *nr*, *ql* donnera toujours sur le tableau l'apparence *p* du point P du terrein.

64. PROBLEME. *Trouver sur le tableau l'apparence d'une droite* PV *qui est sur le Plan du terrein.* (Fig. 25.)

Je cherche l'apparence *p* du point P, ainsi qu'il a été dit dans le Probleme précedent; puis de l'autre point V je mene sur la ligne de terre AB la perpendiculaire VT, & prenant la distance NT avec le compas, je la porte sur la base du tableau de *n* en *t*; & je mene la droite *tr*, je prens aussi avec le compas la distance VT, mais comme elle est trop grande pour pouvoir être mise sur la base du tableau de *t* vers *a*, je la mets de l'autre côté de *t* en *z*, & du point *z* je mene la droite *zl* à l'apparence *l* du point de distance opposé, & l'intersection *u* des lignes *tr*, *zl* est l'apparence du point V du terrein, ce qui se démontre comme ci-dessus, c'est pourquoi la droite *pu* menée du point *p* au point *u* sur le tableau est l'apparence de la ligne PV du terrein; car cette ligne étant droite, son apparence est aussi droite, & par conséquent elle est comprise entre les apparences *p*, *u* des extrêmités P, V.

65. PROBLEME. *Trouver sur le Tableau l'apparence d'une droite* PE *qui est sur le Plan du Terrein & paralelle à la ligne de terre* AB. (Fig. 25.)

Des extrêmités P, E de la ligne PE je mene les droites PQ, EF perpendiculaires sur AB, je prens avec le compas les distances NQ, NF que je porte sur la base du tableau de *n* en *q* & de *n* en *f*, & des points *q*, *f* je mene les droites *qr*, *fr*. Je prens aussi avec le compas la droite PQ, & la portant de *q* en *x* je mene la droite *xl*, & du point *p* je mene dans le tableau entre les droites *qr*, *fr*, la droite *pe* paralelle à la base *ab*, & cette droite est l'apparence de la droite PE sur le terrein.

Car PE étant paralelle à la ligne de terre AB & comprise entre les droites PQ, EF qui sont perpendiculaires sur la ligne de terre, l'apparence de PE sur le tableau doit être aussi paralelle à la base du tableau, (*N.* 53.) & comprise entre les droites *qr*, *fr* qui sont les apparences des droites PQ, EF prolongées jusqu'à l'horizon. Or par la construction le point *p* est l'apparence de l'extrêmité P de la droite PE; donc la ligne *pe* menée du point *p* paralelle à *ab* & comprise entre *qr*, *fr*, est l'apparence de la droite PE; car d'un point *p*, on ne peut pas mener deux differentes paralelles à la ligne *ab*.

66. **Probleme.** *Trouver l'apparence sur le Tableau d'une figure* QPTV, (Fig. 26.) *tracée sur le Terrein, & dont le contour n'est composé que de lignes droites.*

Je cherche les apparences *p*, *q*, *t*, *u* des points P, Q, T, V, de même que ci-dessus, puis menant les droites *pq*; *qu*, *ut*, *tp*, la figure *qptu* est l'apparence de la figure QPTV, ce qui n'a pas besoin de démonstration, & ainsi des autres.

C'est par ce moyen qu'on trouvera dans le tableau *abcd* (*Fig.* 27.) l'apparence du parterre compris dans le plan ABCD, & dans le tableau *abcd*, (*Fig.* 28.) celle du parterre ABCD, &c.

67. **Probleme.** *Trouver sur le Tableau l'apparence* PQTV *d'un cercle tracé sur le Plan* ABCD. (*Fig.* 29.)

Je conçois un quarré EFHX autour du cercle, ensorte que ses côtés EF, XH soient paralelles à la ligne de terre AB; je mene dans ce quarré plusieurs lignes droites telles que ZS, YI, &c. paralelles à ses côtés, puis je cherche dans le tableau les apparences des points où le cercle est coupé par toutes ces lignes droites, & faisant passer une courbe par tous ces points, j'ai l'apparence *pqtu* du cercle PQTV, & on fera la même chose pour trouver l'apparence de toute autre ligne courbe differente du cercle.

68. PROBLÊME. *Trouver ſur le Tableau les apparences de plusieurs lignes* PQ, TS *égales, paralelles entr'elles, à la ligne de terre* AB, *& également éloignées entr'elles.* (Fig. 30.

Je ſuppoſe toujours que AB eſt égal à *ab* & AN = *an*; c'eſt pourquoi des points *a*, *b* je mene dans le tableau les droites *ar*, *br* qui ſont les apparences des droites AD, BC prolongées juſqu'à l'horizon. Je porte les diſtances égales AP, PT, &c. ſur la baſe du tableau de *a* en *x*, de *x* en *z*, &c. & des points *x*, *z*, &c. je mene au point *l* les droites *xl*, *zl*, &c. qui coupent *ar* aux points *p*, *t*, &c. leſquels ſont les apparences des points P, T, &c. (*N.* 62.) ainſi menant des points *p*, *t*, &c. des droites *pq*, *ts*, &c. paralelles à *ab* & compriſes entre les droites *ar*, *br*, ces droites *pq*, *ts*, &c. feront les apparences des droites PQ, TS, &c. tracées dans le plan.

69. PROBLEME. *Trouver ſur le Tableau l'apparence d'une droite* AD *menée dans le Plan, perpendiculaire ſur la ligne de terre* AB, *& diviſée en parties égales* AP, PT. (*Fig.* 30.)

Je mene du point *a* la droite *ar* qui eſt l'apparence de la droite AD prolongée juſqu'à l'horizon; je porte les parties égales AP, PT, &c. ſur la baſe *ab* de *a* en *x*, de *x* en *z*, &c. & des points *x*, *z*, &c. menant au point *l* les droites *xl*, *zl*, &c. les points *p*, *t*, &c. où ces droites coupent la droite *ar*, ſont les apparences des points P, T, &c. (*N.* 62.) donc les droites *ap*, *pt*, &c. ſont les apparences des parties égales AP, PT, &c. de la droite AD.

70. PROBLEME. *Trouver ſur le Tableau l'apparence d'une ligne* PT *paralelle à la ligne de terre* AB *& diviſée en parties égales* PQ, QO, OS, ST. (*Fig.* 31.)

Des points de diviſion P, Q, O, S, T, je mene à la ligne de terre AB les perpendiculaires PX, QZ, ON, &c. je porte les diſtances NZ, NX, NY, NV ſur la baſe du tableau de *n* en *z*, de *n* en *x*, &c. & je mene les droites *xr*, *zr*, &c. je prens auſſi la diſtance PX, & la portant de *x* en *f*, je mene la droite *fl* qui coupe la droite *xr* au point *p*, je mene la droite *pt* paralelle à la baſe *ab* & compriſe entre les droites *xr*, *ur*, & cette droite eſt diviſée par les autres lignes menées au point *r* en parties égales qui ſont les apparences des parties PQ, QO, &c. de la droite PT, ce qui eſt évident par les principes expliqués ci-deſſus.

71. PROBLEME. *Trouver dans le Tableau l'apparence d'un point, d'une ligne ou d'une figure, lorſque les points de diſtance ſont hors du Tableau.*

Soit le plan ABCD, (*Fig.* 32.) dont la ligne principale eſt RM, la ligne de terre eſt AB, & le point de ſtation, c'eſt-à-dire le point du ſpectateur, eſt le point R, je fais en R de part & d'autre de la ligne principale RM deux angles de 45 degrés, ce qui donne l'angle droit SRV. Si je voulois donc que les points de diſtance fuſſent dans le tableau, il faudroit que la baſe du tableau fût égale à la droite SV; or, comme je ſuppoſe que les objets que je veux repréſenter ſont tous compris dans le plan ABCD, & que par conſéquent il ſe trouveroit du vuide à gauche & à droite dans le tableau, ce qui feroit un vilain effet, je fais la baſe *ab* du tableau égale à la ligne de terre, & portant ſur ſon côté la grandeur *al* égale à la hauteur de l'œil, je mene *lh* paralelle au tableau, & la coupant en deux également en *r*, puis menant *rn*, la droite *lh* eſt l'apparence de la ligne horizontale, le point *r* eſt l'apparence du point de vûe, & la droite *rn* eſt celle de la principale NM prolongée juſqu'à l'horizon. Mais les points de diſtance ne peuvent être ſur *lh*, à moins qu'on ne la prolonge de part & d'autre en faiſant les droites *rm* & *ry* égales chacune à la droite NV & NS.

Maintenant, ſi le tableau a aſſez de marge pour pouvoir y placer les apparences *y*, *m* des points de diſtance, il eſt clair qu'en ce cas on trouvera ſur le tableau par le moyen de ces deux points les apparences des objets, comme il a été enſeigné dans les Problemes précedens; mais ſi cela ne ſe peut, voici comme on fera.

Je prens une partie de *rm* ou de NV, telle qu'elle puiſſe être compriſe entre les points *r*, *h*, par exemple le tiers, & la portant de *r* en *t* & de *r* en *u*, je regarde les deux points *t*, *u* comme s'ils étoient les apparences *m*, *y* des points de diſtance. Du point P je mene PQ perpendiculaire ſur la ligne de terre AB; je fais *nq* = NQ, & du point *q* je mene la droite *qr* qui eſt l'apparence de la droite QP prolongée juſqu'à l'horizon; je prens le tiers de la diſtance QP à cauſe que j'ai pris le tiers de *rm*, & portant ce tiers de *q* en *x*, je mene du point *x* au point *t* la droite *xt*, laquelle coupe *qr* au point *p*, & ce point eſt l'apparence du point P, ce que je démontre ainſi.

Si le plan du tableau pouvoit être prolongé, les apparences des points de diſtance ſeroient les points *m*, *y*; c'eſt pourquoi portant la grandeur PQ de *q* en *z*, & du point *z* menant au point *m* la droite *zm*, le point où cette droite couperoit la droite *qr* feroit l'apparence du point P; il n'y a donc qu'à faire voir que *zm* cou-

peroit la droite qr au même point p où la droite xt la coupe.

En quelqu'endroit de qr que soit le point où zm coupe qr, nommons ce point $= f$. Les triangles semblables rfm, zfq donnent $rm. zq :: rf. fq$; & dans les triangles semblables rpt, xpq, nous avons $rt. xq :: rp. pq$. Or, à cause que rt est le tiers de rm, & que xq est le tiers de zq, nous avons $rm. zq :: rt. xq$; donc $rf. fq :: rp. pq$; & partant $rf + fq. fq :: rp + pq. pq$, c'est-à-dire $rq. fq :: rq. pq$; mais $rq = rq$; donc $fq = pq$, & par conséquent le point f & le point p ne sont qu'un seul & même point. Donc, &c.

On fera la même chose pour trouver les apparences des lignes & des figures tracées dans le plan, observant toujours que si rt ou ru n'est que la moitié ou le tiers, ou le quart de rm, les parties qx des distances PQ des points tels que P ne doivent être que la moitié, ou le tiers, ou le quart de ces distances.

72. Probleme. *Trouver les apparences d'un point, d'une ligne, ou d'une figure lorsqu'il n'y a qu'un seul point de distance dans le tableau, & que le point de vûe est trop proche de l'un des côtés.*

Soit le plan ABCD, (*Fig.* 33.) dont la ligne de terre est AB; la principale MN, & le point de station R. Je fais de part & d'autre de MR des angles SRM, BRM de 45 degrés, ce qui donne l'angle droit SRB; ainsi il faudroit que la base du tableau fût égale à SB, si je voulois que les deux points de distance fussent dans ce tableau. Mais comme je ne veux représenter que ce qui est dans le plan ABCD, je prens un tableau dont la base ab soit égale à la ligne de terre, & portant sur son côté la grandeur bh égale à la hauteur de l'œil, je mene hl paralelle à ab, & faisant lr égal à AN, puis menant rn perpendiculaire sur ab; le point r est l'apparence du point de vûe, le point h est l'apparence de l'un des points de distance, & la droite rn est celle de la principale MN prolongé jusqu'à l'horizon.

Supposant donc qu'on demande l'apparence du point P, je mene PQ perpendiculaire sur AB, & faisant $nq = $ NQ, je mene qr, ce qui me donne l'apparence de la ligne PQ prolongée jusqu'à l'horizon, & par conséquent l'apparence du point P est sur cette ligne; or il faudroit pour trouver l'apparence de ce point, prendre la distance PQ & la porter de q vers a pour pouvoir ensuite mener une ligne au point h; mais comme l'extrêmité a du tableau est trop proche du point q, voici comme je fais.

De l'autre extrêmité b de la base du tableau, je mene la droite

br, puis faisant *bx*=PQ, je mene la droite *xh* qui coupe *br* en *f*, & du point *f* je mene *fp* paralelle à la base du tableau, & le point *p* où cette paralelle coupe *qr*, est l'apparence demandée du point P. Ce que je prouve ainsi.

Je prens BX=QP=*bx*=FB, & je mene les droites XF & FP; ainsi FP est paralelle à QB, & l'angle FXB est de 45 degrés; or par la construction, les droites *qr*, *br* sont les apparences des droites QP, BF prolongées jusqu'à l'horizon; le point *f* est l'apparence du point F, & la droite *fp* paralelle à *qb* & comprise entre les droites *qr*, *br* est l'apparence de la droite FP paralelle à QB & comprise entre les droites QP, BF; donc le point *p* est l'apparence du point P, & ainsi des autres.

C'est de cette façon qu'on peut trouver dans le tableau *abcd* l'apparence des objets tracés dans le plan ABCD dont la principale est MN, & de même des autres.

73. Probleme. *Construire une Echelle de Perspective.*

La multiplicité des lignes qu'il faut tirer lorsqu'on veut représenter sur un tableau les objets tracés sur un plan, cause souvent beaucoup de confusion & toujours bien de la malpropreté sur la toile & encore plus sur le papier; c'est pourquoi il est à propos d'avoir un brouillon de même grandeur que le tableau, & d'y construire une Echelle dont on se servira pour porter les positions des points, des lignes & des figures, ainsi qu'on va voir.

Soit le plan ABCD, (*Fig.* 34.) dont la ligne de terre est AB, & la principale est MN. Je divise la droite AB en petites parties égales selon la grandeur de cette ligne, par exemple en *huit* AP, PQ, &c. & des points de division je mene des perpendiculaires PT & sur AB. Je porte AP sur AD autant de fois qu'il peut y être contenu, & des points Y, S, &c. de division j'éleve des perpendiculaires sur AD, & par-là le plan se trouve divisé en grand nombre de petits quarrés tous égaux entr'eux. Cela fait.

Je prens un plan égal à la grandeur du tableau, & dont la base *ab* soit égale à celle du tableau. J'y marque, comme il a été dit ci-dessus, les apparences *hl* de la ligne horizontale, *r* du point de vûe, *h*, *l* des points de distance si ces points sont dans le tableau, & *rn* de la ligne principale. Je divise ensuite la base *ab* =AB en un même nombre de parties égales que AB, en portant AP de *a* en *p*, de *p* en *q*, &c. & des points de division je mene les droites *ar*, *pr*, *qr*, &c. qui sont les apparences des droites AD, PT, &c. prolongées jusqu'à l'horizon. Du point *p* je mene

la droite *pl* qui coupe *ar* en *y*, & par conséquent *ay* est l'apparence de AY, & le point *y* est l'apparence du point Y; ainsi menant du point *y* la droite *yu* paralelle à la base du tableau & comprise entre les droites *ar*, *br*, cette droite *yu* est l'apparence de la droite YV, & sa partie *yf* est celle de la partie YF. Je mene du point *f* la droite *ft* qui coupe *ar* en S, & la partie *ys* est l'apparence de la partie VS. C'est pourquoi menant du point S entre les droites *ar*, *br* une paralelle à la base *ab*, cette paralelle sera l'apparence de la droite menée du point S paralellement à AB & comprise entre les droites AD, BC, & continuant de la même façon, ainsi que la Figure le fait voir, le trapezoïde *axzb* est l'apparence du plan ABCD, & tous les petits trapezoïdes qui remplissent le trapezoïde *axzb*, sont les apparences des petits quarrés qui remplissent le plan ABCD.

Cette Echelle étant achevée, soit la ligne EI dans le plan, je cherche le point *e* qui est l'apparence du point E, & le point *i* qui est l'apparence du point *i*, & la ligne *ei* menée entre les points *e*, *i*, est l'apparence de la ligne EI, & on trouvera de la même façon les apparences des lignes & des figures, quand les extrêmités des lignes ou des angles des figures se trouveront sur l'intersection de deux lignes, dont l'une est perpendiculaire sur AB, & l'autre perpendiculaire sur AD.

Lorsque quelque point se trouvera dans un des quarrés du plan, on pourra déterminer sa position à vûe d'œil dans le trapezoïde qui est l'apparence de ce petit quarré, supposé que ce trapezoïde soit éloigné de la base *ab*; car plus ces trapezoïdes s'éloignent de la base, plus ils deviennent petits, & par conséquent on ne courera pas risque de commettre une erreur sensible; mais si ce trapezoïde est proche de la base, on déterminera la position de la façon que je vais dire, & qui pourra même servir à l'égard des petits trapezoïdes, si l'on est bien aise de travailler avec toute la justesse possible.

Soit le point P dans le quarré FSVT, (*Fig.* 35.) dont l'apparence est le trapezoïde *fsut*, je mene de ce point une perpendiculaire PQ sur la ligne de terre AB; je fais *nq* = NQ, puis mettant la regle sur les points *q*, *r*, je ne trace de la ligne *qr* que la partie *xz* qui doit être comprise dans le trapezoïde *tfsu*. Je prens la distance PQ, & la portant de *q* en *o*, je mets la regle sur les points *o*, *h*, je ne trace point la ligne *oh*, mais je marque simplement

ment le point *p* où elle coupe la ligne *xz*, & ce point eſt l'apparence du point P, & ainſi des autres.

Après avoir trouvé de cette façon l'apparence de toutes les figures qui ſont ſur le plan, il ne s'agit plus que de tranſporter ces apparences du brouillon ſur le plan qui doit être le tableau. Or cela eſt fort aiſé; car ſi je veux tranſporter la ligne *ei* ſur le tableau, (*Fig.* 34.) je prens avec le compas la grandeur *ae*, & portant la pointe ſur l'extrêmité de la baſe du tableau, je décris avec l'autre un arc; je prens auſſi la diſtance *be*, & portant la pointe ſur l'extrêmité droite de la baſe du tableau, je décris avec l'autre un arc qui coupe le premier en un point, & ce point ſe trouve poſé ſur le tableau de la même façon que le point *e* eſt poſé ſur le brouillon, & ainſi des autres. Au reſte, un peu d'uſage ſur cette matiere en apprendra beaucoup plus que les plus longs diſcours.

Comme dans le tableau *abcd*, (*Fig.* 34.) le trapezoïde *axzb* qui repréſente le plan ABCD laiſſe des vuides à droite & à gauche; ſi l'on vouloit remplir ces vuides, on prolongeroit la ligne *xz* en *t*; puis portant ſur *zt* l'une des parties égales de *xz* autant de fois qu'elle pourroit y être contenue, on meneroit du point *r* par des points de diviſion de *zt*, des droites qui formeroient avec les lignes paralelles à la baſe *ab*, des trapezoïdes leſquels repréſenteroient des quarrés égaux à ceux du plan, ce qui eſt une ſuite des principes ci-deſſus.

De la maniere de repréſenter les Lignes & les Figures élevées ſur le Plan du Terrein.

74. PROBLEME. *Trouver ſur le Tableau l'apparence d'une Ligne droite élevée perpendiculairement ſur un point* P *du Plan* ABCD, (Fig. 36.) *dont la principale eſt* MN.

Je cherche l'apparence *p* du point P en menant la perpendiculaire PQ ſur AB, puis faiſant *nq* = NQ, & le reſte comme ci-deſſus. Du point *q* je mene dans le tableau la droite *qs* perpendiculaire ſur la baſe *ab* & égale à la ligne perpendiculaire élevée ſur le point P dont on demande l'apparence; du point S je mene la droite *sr* à l'apparence *r* du point de vûe, & du point *p* je mene entre les lignes *qr*, *sr* la droite *pt* paralelle *qs*. Cette droite *pt* eſt l'apparence demandée. Ce que je démontre ainſi.

A cauſe que les lignes *qr*, *sr* vont aboutir à l'apparence *r* du

point de vûe, ces deux lignes représentent deux lignes paralelles, dont l'une QP prolongée jusqu'à l'horizon est dans le plan du terrein, & perpendiculaire à la ligne de terre AB, & l'autre est élevée au-dessus du terrein d'une hauteur égale à *qs*. Or les lignes *qs*, *pt* représentent deux lignes paralelles entre les deux précedentes; donc les lignes *qs*, *pt* représentent deux lignes égales, dont l'une seroit perpendiculaire sur le terrein en Q, & l'autre en P, & partant, la ligne *pt* est l'apparence de la ligne demandée. Les Problemes suivans renferment des pratiques encore plus commodes.

75. Probleme. *Plusieurs lignes égales étant élevées perpendiculairement sur le plan* ABCD *aux points* P, T, O, S, X *d'une droite* PX *paralelle à la ligne de terre, trouver l'apparence de ces lignes*, (Fig. 37.)

Je cherche l'apparence *px* de la ligne PX & les apparences *p*, *t*, *o*, *s*, *x*, des points P, T, O, S, X, (*N.* 70.) je cherche aussi l'apparence *p*1 de la ligne perpendiculaire sur le point P, (*N.* 74.) du point 1 je mene dans le tableau la ligne 15 paralelle & égale à *px*, puis des points *t*, *o*, *s*, *x*, je mene entre les droites *px*, 15, les lignes *t*2, *o*3, *s*4, *x*5 égales & paralelles à la droite *p*1, ce qui me donne les apparences des lignes demandées. En voici la démonstration.

Les lignes élevées sur les points P, T, O, S, X étant égales & perpendiculaires sur le plan & sur la ligne PX, sont paralelles entr'elles, & la droite qui passeroit par leurs sommets est paralelle & égale à la ligne PX, & par conséquent cette ligne est aussi paralelle à la ligne de terre AB, & son apparence dans le tableau doit être paralelle à *ba* ou *px*, (*N.* 53.) or la ligne *p*1 étant l'apparence de la perpendiculaire élevée sur le point P par la construction, le point 1 est l'apparence d'un point de la droite qui seroit menée par les sommets de toutes les perpendiculaires, & la droite 15 est la direction de l'apparence de cette ligne, & partant les apparences des perpendiculaires doivent se terminer sur 15. Or les apparences des perpendiculaires doivent être perpendiculaires sur la base *ab* du tableau qui est la ligne de terre, (*N.* 54.) donc elles doivent être aussi perpendiculaires sur *px*; ainsi ces apparences doivent être les droites *p*1, *t*2, *o*3, &c.

De-là il suit que si plusieurs lignes égales sont perpendiculaires sur le terrein, & également éloignées de la ligne de terre, leurs apparences sur le tableau sont égales.

76. **Probleme.** *Plusieurs lignes égales étant élevées perpendiculairement sur le plan* ABCD, (Fig. 38.) *en des points* P, T, &c. *inégalement éloignés de la ligne de terre* AB, *trouver leurs apparences sur le tableau.*

Des points P, T, &c. je mene les droites PQ, TS, &c. perpendiculaires sur la ligne de terre AB; je fais *nq* = NQ, & *ns* = NS; je mene les droites *qr*, *sr*, & achevant le reste à l'ordinaire, je trouve les apparences *p*, *t* des points P, T; du point *a* je mene la droite *ar* qui est l'apparence de la droite AD prolongée jusqu'à l'horizon. Je porte sur le côté du tableau la droite *az* égale à la hauteur des perpendiculaires égales élevées sur les points P, T, & du point *z* je mene la droite *zr*. Des points *p*, *t* je mene les droites *pf*, *ti* paralelles à la base du tableau, & des points *f*, *i* où ces lignes coupent la droite *ar*, je mene entre les lignes *ar*, *zr* les droites *f*3, *i*4, paralelles à *az*; sur le point *p* de la ligne *fp* j'éleve la perpendiculaire *p*1 que je fais égale à *f*3, & sur le point *t* de la ligne *it* j'éleve la perpendiculaire *t*2 que je fais égale à *i*4, & les deux lignes *p*1, *t*2 sont les apparences demandées. Ce que je prouve ainsi.

A cause que les droites *ar*, *zr* aboutissent au point *r*, ces deux lignes représentent deux lignes paralelles, dont l'une est la droite AD prolongée jusqu'à l'horizon, & l'autre est une autre droite élevée au-dessus du point A d'une hauteur égale à *az*; ainsi les lignes *f*3, *i*4 étant paralelles entr'elles & comprises entr les deux *ar*, *zr* représentent des lignes égales entr'elles & à la ligne élevée sur le point P. Or la droite *fp* étant paralelle à la ligne *ab* représente la ligne FP du terrein laquelle est paralelle à AB. Donc, les lignes égales *f*3, *p*1 représentent des perpendiculaires élevées sur les points F, P égales entr'elles & à la ligne *az*, (*N.* 75.) qui est la hauteur de la perpendiculaire dont on demande l'apparence, & partant *p*1 est l'apparence de celle qui seroit élevée sur le point P; & on prouvera de la même façon que *t*2 est l'apparence de la perpendiculaire qui seroit élevée sur le point T & égale à la hauteur *az*.

On trouvera ci-dessous (*N.* 84.) la maniere de représenter plusieurs lignes inégales perpendiculaires sur differens points du terrein.

77. **Probleme.** *Trouver sur le tableau l'apparence d'un paralellepipede dont la base sur le plan est* PVTQ, *& dont les côtés montans sont perpendiculaires sur la base*, (Fig. 39.)

Je cherche l'apparence *pqtu* de la base PQTV, je porte sur le côté du tableau la hauteur *af* du paralellepipede, des points *a*, *f* je mene les droites *ar*, *fr*; je prolonge les droites *ut*, *pq* jusqu'à ce qu'elles coupent *ar* en *x* & *z*, & des points *x*, *z* je mene entre les droites *ar*, *fr* les lignes *x*2, *z*3 paralelles à *af*; j'éleve aux points *u*, *t* les droites *u*4, *t*5 égales chacune à *x*2, & aux points *p*, *q* les droites *p*6, *q*7 égales chacune à *z*3; puis menant les droites 64, 45, 57, 76, la figure *pqtu*4675 est l'apparence du paralellepipede proposé. Ce qui n'a pas besoin de démonstration.

78. PROBLEME. *Trouver l'apparence sur le Tableau d'un prisme dont la base sur le plan est l'exagone* PQSTVX, *& dont les côtés montant sont perpendiculaires sur la base.* (Fig. 40.)

Je cherche l'apparence *pqstux* de la base PQSTVX, je porte sur le côté du tableau la hauteur *af* du prisme; des points *a*, *f* je mene les droites *ar*, *fr*; des angles *p*, *q*, *s*, *t*, *u*, *x* je mene des paralelles à la base *ab*, lesquelles coupent la droite *ar* en des points, d'où je mene entre les lignes *ar*, *fr* des droites paralelles à *af*, & ces droites étant transportées aux angles auxquels elles conviennent sont les apparences de la hauteur du prisme. Par exemple, la droite 23 étant mise en *u* de *u* en 4 perpendiculairement sur la base du tableau, est l'apparence de la perpendiculaire élevée sur le point V & égale à *af*, & ainsi des autres; de façon qu'en menant des droites par les sommets des perpendiculaires élevées sur les points *p*, *q*, *s*, *t*, *u*, *x*, on aura l'apparence du prisme.

Et on trouvera de la même façon les apparences des autres solides perpendiculaires sur le terrein de quelque figure qu'ils soient; mais il faut prendre garde quand on veut dessiner, que la plûpart des lignes que l'on tire ne doivent plus paroître; par exemple, il est aisé de voir qu'eu égard à la position de l'œil, la surface élevée sur le côté *px* de la base sera visible de même que celles qui sont élevées sur les côtés *xu*, *ut*, & qu'au contraire celles qui sont élevées sur les côtés *pq*, *qs*, *st* ne peuvent être vûes à cause que les précédentes les cachent; ainsi après avoir trouvé l'apparence du solide, il faudra effacer les perpendiculaires élevées sur les angles *q*, *s*, & laisser subsister les autres.

C'est en suivant ces regles qu'on trouvera dans le tableau *abcd* (*Fig.* 41.) l'apparence de plusieurs pilastres dont les bases sont les petits quarrés du plan ABCD, & dans le tableau *abcd* (*Fig.* 42.)

l'apparence de plusieurs colonnes dont les bases sont les cercles du plan ABCD, & ainsi des autres.

79. *Definition*. Si d'un point P élevé en l'air, (*Fig*. 43.) on abaisse une perpendiculaire PQ sur le plan ABCD du terrein, ce point Q se nomme *Projection* ou *Assiette* du point P. De même si de tous les points d'une ligne PT, (*Fig*. 44.) élevée en l'air, on abaisse des perpendiculaires sur le terrein, la ligne QV qui passe par tous les points où les perpendiculaires coupent le terrein sera la projection ou assiette de la ligne PT; d'où l'on voit que la projection d'une ligne droite élevée en l'air & qui n'est pas perpendiculaire sur le plan du terrein, est toujours une ligne droite.

Si les extrêmités P, T d'une ligne droite PT élevée en l'air sont également éloignées du plan, la projection QV est égale à la droite PT; car ces deux lignes sont alors paralelles entre les deux paralelles PQ, TV. Mais si les extrêmités M, T d'une droite MT ne sont pas à égale distance du plan, la projection QV est moindre que MT, à cause que QV est perpendiculaire entre les paralelles MQ, TV, & qu'au contraire MT est oblique; ainsi si le point M s'éloignoit de plus en plus du plan, & que le point T restât toujours fixe, la projection de MT deviendroit petite de plus en plus jusqu'à ce que MT fût dans la position TN perpendiculaire au plan, & alors sa projection ne seroit plus qu'un point V.

Si un plan MNPQ est élevé en l'air, & qu'après avoir mené de tous ses angles des perpendiculaires M*m*, N*n*, P*p*, Q*q* sur le plan du terrein, on joigne ces points par les lignes *mn*, *np*, *pq*, *qm*, la figure *mnpq* sera la *projection* ou l'*assiette* du plan MNPQ, & cette projection sera égale au plan MNPQ, si ce plan est paralelle à celui du terrein, mais elle sera moindre si MNPQ est oblique; de façon que si l'on fait tourner le plan MNPQ autour de son côté fixe QP, son *assiette* diminuera de plus en plus, & sera enfin une ligne droite *pq*, lorsque le plan MNQP sera dans la position QPZX perpendiculaire au terrein.

80. Ce que je viens de dire des lignes & des plans élevés en l'air doit s'entendre aussi des lignes & des plans qui coupent le terrein obliquement. Par exemple, si la ligne PM, (*Fig*. 46.) fait un angle aigu avec le plan du terrein, j'abaisse du point P la perpendiculaire PQ sur le terrein, & la droite MQ est l'*assiette* de la ligne MP. Il est clair que cette assiette diminuera à mesure

que MP sera un angle moins aigu, & qu'elle ne sera plus qu'un point M, lorsque MP sera perpendiculaire sur le plan.

De même, soit la surface MNPQ, (*Fig.* 47.) oblique sur le plan ABCD qu'elle coupe en MQ, j'abaisse des angles N, P les droites NT, PX perpendiculaires sur ABCD, & menant les droites TM, TX, XQ, j'ai la projection ou l'assiette MTXQ du plan MNPQ, & cette projection diminuera à mesure que MNPQ sera un angle moins aigu avec le plan ABCD, & se changera en la ligne MQ, lorsque le plan MNPQ sera perpendiculaire sur le terrein.

L'assiette d'un plan élevé en l'air, & qui n'est pas dans une position verticale au plan du terrein, est donc toujours un plan.

81. Probleme. *Trouver sur le Tableau l'apparence d'une ligne* PS, (Fig. 48.) *élevée obliquement sur le terrein* ABCD *au point* P.

Du sommet S de cette ligne je mene ST perpendiculaire sur le plan ABCD; ainsi PT est l'assiette de cette ligne, & le point T est l'assiette du point S. Je cherche dans le tableau les apparences *p*, *t* des points P, T. Je porte la grandeur de TS sur le côté du tableau de *a* en *f*, & je mene les droites *ar*, *fr*; du point *t* je mene *t*2 paralelle à la base *ab*, & du point 2 la droite 23 paralelle à *af*; enfin du point *t* je mene *ts* égale & paralelle à 23, & la droite *ps* menée du point *p* au point *s*, est l'apparence de la droite PS, ce qui n'a pas besoin de démonstration.

82. Probleme. *Trouver l'apparence d'un rectangle* MNPQ, (Fig. 49.) *élevé obliquement sur le plan* ABCD *qu'il coupe en* MQ.

Je mene des angles N, P des perpendiculaires NT, PV sur le plan du terrein, je cherche dans le tableau l'apparence des points M, Q, V, T. Je porte sur le côté du tableau la droite *af* égale à la hauteur VP ou TN; car ces deux hauteurs sont égales à cause que le plan MNPQ est un rectangle; des points *t*, *u* je mene *t*2, *u*3 paralelles à la base *ab*, & des points 3, 2 les droites 34, 25 paralelles à *af*; du point *u* je mene *up* paralelle & égale à 34, & du point *t* la droite *tn* paralelle & égale à 25, & menant les droites *mn*, *np*, *pq*, *qm*, j'ai l'apparence *mnpq* du rectangle MNPQ.

83. Probleme. *Trouver l'apparence d'un plan* MNPQS *qui a plusieurs angles & qui coupe obliquement le plan* ABCD *en* MS. (Fig. 51.)

Des angles N, P, Q j'abaisse sur le plan du terrein les perpendiculaires NT, PV, QX, & menant les droites MT, TV,

VX, XS, j'ai la projection MTVXS du plan MNPQS, je cherche l'apparence *mtuxs* de cette projection par les regles ordinaires. Je porte sur le côté du tableau la droite *af* égale à la hauteur NT, la droite *ae* égale à la hauteur VP, & la droite *ai* à la hauteur XQ. Des points *a*, *f*, *e*, *i* je mene les droites *ar*, *fr*, *er*, *ir*, & des angles *t*, *u*, *x*, je mene les droites *t*2, *u*3, *x*4 qui coupent *ar* aux points 2, 3, 4; du point 2 je mene entre les droites *ar*, *fr* la droite 25 paralelle à *af*, & du point *t* je mene *tn* égale & paralelle à 25. Ainsi *tn* est l'apparence de la hauteur TN; car les droites *af*, 25 étant paralelles entre les lignes *ar*, *fr* représentent des lignes égales entr'elles & à cause de *af* = TN, la ligne 25 représente une ligne égale à TN; or, à cause de *t*2 paralelle à *ab*, les points 2, *t* représentent des points du plan également éloignés de la ligne de terre AB; donc les apparences 25, *tn* des perpendiculaires égales entr'elles & à TN doivent être égales. (*N*. 75.)

De même, du point 3 je mene entre les droites *ar*, *er* la ligne 36 paralelle à *ae*, & du point *u* je mene *up* égale & paralelle à 36, & la ligne *up* est l'apparence de la ligne VP; enfin du point 4 je mene entre les droites *ar*, *ir* la ligne 47 paralelle à *ai*, & du point *x* je mene *xq* égale & paralelle à 47, & la ligne *xq* est l'apparence de la ligne XQ. Par les mêmes raisons que nous venons de dire.

Les apparences des points M, N, P, Q, S du plan MNPQS étant ainsi trouvées, je mene les droites *mn*, *np*, *pq*, *qs*, *sm*, & j'ai l'apparence *mnpqs* du plan MNPQS.

84. *Remarque*. La pratique du Probleme précédent & la démonstration que nous en avons donné, nous fournissent un moyen aisé de construire une Echelle qui servira à trouver les apparences des differentes hauteurs inégales qui coupent le plan en differens points plus ou moins éloignés de la ligne de terre.

Soit le tableau *abcd*, (*Fig*. 50.) dont le point de vûe est *r*; je porte sur le côté du tableau plusieurs parties égales *a*1. 12. 23. 34. 56, &c. de la grandeur, par exemple d'un pied de l'Echelle du plan; des points de division *a*, 1, 2, 3, 4, & je mene les lignes *ar*, 1*r*, 2*r*, &c. ainsi toutes les lignes paralelles à *a*1 & comprises entre les deux *ar*, 1*r* représenteront des lignes égales qui vaudront chacune un pied; de même toutes les lignes paralelles à *a*2 & comprises entre les droites *ar*, 2*r* représenteront des lignes égales qui vaudront chacune deux pieds, & ainsi des autres.

Suppoſant donc que les points *m*, *h*, *q* ſoient les apparences de différens points du plan, & qu'on veuille l'apparence d'une hauteur de 2 pieds en *m*, de 3 pieds en *h*, de 6 pieds en *q*. Je mene des points *m*, *h*, *q*, les droites *mt*, *hf*, *qs* paralelles à la baſe *ab*; & du point *t* menant entre les droites *ar*, *2r* la ligne *tu* paralelle à *a2*; je mene du point *m*, la ligne *mp* égale & paralelle à *tu*, & *mp* eſt l'apparence d'une hauteur de 2 pieds qui feroit ſur le point du plan dont le point *m* eſt l'apparence. De même du point *f* je mene entre les droites *ar*, *3r* la droite *f9* paralelle à *a3*, & du point *h* la droite *h7* égale & paralelle à *f9*, & la ligne *h7* repreſente une hauteur de 3 pieds qui feroit ſur le point du plan dont le point *h* eſt l'apparence. Enfin, du point S je mene entre les droites *ar*, *6r* la ligne *sx* paralelle à *ab*, & du point *q* la ligne *qz* égale & paralelle à *sx*, & cette ligne *qz* repréſente une hauteur de 6 pieds qui feroit ſur le point du plan dont le point *q* eſt l'apparence, & ainſi des autres.

85. PROBLEME. *Trouver l'apparence d'une droite* PQ *élevée en l'air au-deſſus du plan* ABCD (Fig. 52.).

Des extrêmités P, Q, j'abaiſſe ſur le plan les perpendiculaires PS, QV. Je cherche les apparences *s*, *u* des points S, V; je porte ſur le côté du tableau la droite *af* égale à la hauteur SP du point P, & la droite *ae* égale à la hauteur VQ du point Q; je mene des points *a*, *e*, *f* les droites *ar*, *er*, *fr*, & des points *s*, *u* les lignes *s2*, *u3*, qui coupent la droite *ar* aux points 2, 3; du point 2, je mene entre les droites *ar*, *fr*, la droite 24 paralelle à *af*, & du point 3 entre les droites *ar*, *er*, la droite 35 paralelle à *ae*. Du point *s*, je mene *sp* paralelle & égale à 24, & du point *u*, la droite *uq* égale & paralelle à 35, & joignant les points *p*, *q* par la droite *pq*, j'ai l'apparence *pq* de la droite PQ.

86. PROBLEME. *Trouver l'apparence d'un plan* PQST *élevé en l'air au-deſſus du plan* (Fig. 53.).

De tous les angles T, P, Q, S du plan PQST j'abaiſſe des perpendiculaires PV, QZ, SY, TX. Je cherche les apparences *u*, *z*, *y*, *x*, des points V, Z, Y, X, & j'acheve le reſte comme dans les Problêmes précedens.

87. PROBLEME. *Trouver l'apparence d'un paralellepipede* PN *dont la baſe* PQRS *eſt ſur le plan, & dont les côtés montans ſont obliques ſur le même plan* ABCD (Fig. 54.).

Des angles V, I, N, M, j'abaiſſe ſur le plan les perpendiculaires VX, IZ, NY, MT. Je cherche l'apparence *pqrs* de la baſe PQRS,

PQRS, & l'apparence *xzyt* des points de projection X, Z, Y, T; je cherche aussi les apparences *ux*, *iz*, *ny*, *mt* des perpendiculaires VX, IZ, NY, MT; enfin, menant les droites *pu*, *qi*, *sm*, *rn*, *um*, *mn*, *ni*, *iu*, j'ai l'apparence *pn* du paralellepipede incliné PN.

Et on trouvera de la même façon les apparences des autres solides inclinés sur le plan ou élevés en l'air au-dessus du plan. Mais en cela il se rencontre souvent une difficulté qu'il est bon d'éclaircir.

Soit, par exemple, le prisme triangulaire PQSVTX (*Fig.* 55.) tronqué par les deux plans inclinés PQX, STV. Concevons que ce solide soit élevé en l'air, de sorte que sa face PQSV soit paralelle au plan du terrein; il est clair qu'on peut mener aisément des quatre angles P, Q, S, V des perpendiculaires sur le terrein; mais comme la même chose ne peut pas se faire à l'égard des angles X, T à cause qu'il faudroit traverser le solide, je prolonge XT de part & d'autre en H & L jusqu'à ce que je puisse mener librement des points H, L des perpendiculaires HE, LF sur le terrein; ainsi la ligne EF est la projection de la ligne HL, & lui est égale à cause que nous supposons HL paralelle au terrein; c'est pourquoi retranchant de EF la partie ER égale à HX, & la partie FY égale à TL, le reste RY est égal à la ligne XT; ainsi menant les droites XR, TY, ces droites seront paralelles & égales à EH, ou FL, & partant elles seront perpendiculaires sur le terrein, & les points R, Y seront la projection des angles X, T; d'où il est aisé de juger de ce qu'il faudroit faire dans d'autres cas.

Supposant donc que dans le plan ABCD (*Fig.* 56.) les points P, Q, T, S, V, X soient la projection des angles du solide dont nous venons de parler, & qu'on veuille representer ce solide élevé en l'air & soutenu par quatre piliers; ensorte que la hauteur de chacun de ces piliers soit égale à la ligne *af*, & que les hauteurs de chacun des deux autres angles au-dessus des points V, S soit égale à *ae*. Je cherche les apparences *p*, *q*, *t*, *s*, *u*, *x* des points P, Q, T, S, V, X, je mene les droites *ar*, *fr*, *er*, & achevant le reste à l'ordinaire, j'ai l'apparence demandée; ainsi qu'on voit dans la Figure, & de même des autres.

De quelle maniere on doit placer la Ligne principale ſur le Plan ; la Ligne horizontale, le point de vûe & les points de diſtance ſur le Tableau.

88. J'ai déja dit plus haut qu'il falloit beaucoup de choix & de goût pour repréſenter ſur un tableau les objets vûs du meilleur côté, & rendre leur apparence la plus gracieuſe qu'il ſe puiſſe. Pour dire maintenant quelque choſe de moins vague, entrons dans un petit détail.

89. Suppoſons que le plan ABCD (*Fig.* 57.) ſoit le plan d'un grand Parterre où ſont pluſieurs compartimens avec des Statues, des Baſſins, des Fontaines, des Allées, &c. & qu'il ſe trouve, ſi l'on veut, vers le fonds CD une grande & belle Maiſon, avec des aîles de part & d'autre, & que tout ſoit dans une parfaite ſymmétrie. En ce cas, ſi je veux repréſenter tous ces objets ſur un tableau, je dois placer ma ligne principale de façon qu'elle coupe le plan ABCD en deux également ; car pour bien découvrir le bel ordre qui régne dans ce parterre, il eſt clair qu'on doit ſe mettre ſur quelqu'un des points de la ligne MN prolongée du côté de R.

La même choſe doit s'obſerver toutes les fois qu'on veut repréſenter des objets qui ont une parfaite ſymmétrie, ſuppoſé que ces objets ſoient le ſujet principal du tableau ; ainſi dans le plan d'une grande Allée ornée de Statues, de Baſſins, ou dans celui de l'intérieur d'un Temple régulier, &c. on doit toujours mettre la ligne principale, comme nous venons de le dire.

90. Au contraire ſi les objets ſur le plan ABCD ou élevés ſur ce plan ne ſont pas ſymmétriſés, & qu'il s'en trouve de plus beaux, ou plus agréables à voir du côté de AD, que du côté de CB ; il faut placer la principale du côté de AD ; par exemple, en XZ, car par ce moyen les apparences des objets qui ſont du côté de AD paroîtront mieux, à cauſe que ce côté ſera vû moins obliquement que le côté CB.

De même, ſi les objets ſur le plan ABCD ou élevés ſur ce plan étoient dans une parfaite ſymmétrie, mais que le principal ſujet du Peintre fût quelque action qui ſe paſſeroit du côté de AD, il faudroit alors placer la principale du côté de AD, comme en

XZ par la raison que le principal sujet du Tableau doit toujours être celui qui frappe le plus.

Supposons qu'on veuille représenter l'Auditoire d'un Sermon fait devant le Roi, dans la Chapelle de Versailles. Le principal sujet est ici le Roi, & ce qui l'environne, les yeux des Spectateurs sont tournés de ce côté. C'est pourquoi si le Prédicateur est en H, & le Roi vis-à-vis en L; il faut placer la principale le plus près qu'on pourra de L, afin que tout ce qui est du côté de BC paroisse beaucoup mieux. Et il y a dans ce cas deux choses à observer.

La premiere, c'est de ne pas offusquer le sujet principal par une multiplicité de figures inutiles. Ainsi ce seroit une grande faute si sous prétexte de représenter entiérement la Chapelle de Versailles, on mettoit la ligne de terre à l'entrée de cette Chapelle ; car comme dans un Sermon les personnes qui sont vers la porte, tournant le dos vers l'entrée de l'Eglise ; le devant du Tableau seroit rempli de figures qu'on verroit par derriere, ce qui feroit un fort vilain effet ; & d'ailleurs le sujet principal, & tout ce qui l'environne paroîtroit trop petit & seroit confondu dans la foule. La maxime générale est de ramener le sujet principal au devant du Tableau autant qu'il est possible, afin qu'il frappe davantage les yeux.

La seconde chose qu'il faut observer, c'est de faire entrer dans le Tableau tout ce qui a du rapport au sujet principal, de peur de laisser à deviner ce que l'on a voulu représenter. Je me souviens qu'étant autrefois dans une Ville du Languedoc, le Gouverneur de la Province alla entendre le Sermon, suivi d'une nombreuse Noblesse. L'Auditoire étoit brillant, la plupart des Dames de la Ville s'y trouverent dans toute leur parure, & le reste de l'Eglise étoit rempli d'une grande affluence d'Artisans & de Bourgeois. Un Peintre fameux, & qui réussissoit très-bien à faire des Portraits, se glissa dans la foule, & perça jusqu'auprès de la Chaire, sous la basse nef derriére le Prédicateur. Comme de-là il voyoit en face, le Gouverneur, la Noblesse, les Dames & le reste de l'Auditoire, tout le fruit qu'il tira du Sermon, fût de se graver dans l'imagination, les traits & les attitudes des principales personnes qu'il vouloit représenter, dans l'idée d'en faire un des plus beaux sujets qui eussent jamais paru en fait de Tableau. De retour chez lui, il fit son esquisse, il imprima sa toile, & se mit à travailler sans relâche, tout autre ouvrage cessant. Un hom-

me à talens qui travaille avec ſoin & application ne manque pas de réuſſir. Le Tableau étoit parfait, l'architecture fort bien repréſentée, les viſages très-reſſemblans, les attitudes naturelles, les draperies moëleuſes, le clair-obſcur jetté avec beaucoup d'art, les couleurs vives & bien menagées, en un mot, il n'y auroit rien eû à deſirer, ſi on y avoit vû la Chaire & le Jeſuite qui débitoit ſon Sermon. Satisfait de la beauté de ſon Ouvrage, le Peintre s'empreſſa de l'étaler aux yeux de tous ceux, qui, par curioſité ou par envie de ſe faire peindre, venoient dans ſon attelier. Le bruit s'en répandit bien-tôt, le Tableau du Sermon fut pendant quelque-tems l'unique ſujet des entretiens, des aſſemblées, & des promenades; on accouroit en foule pour le voir, & dire, je l'ai vû : Tout le monde applaudiſſoit, & à l'exception d'une ou deux Dames que le Peintre n'avoit pas trouvé aſſez jolies pour y mettre leurs portraits; tous les ſuffrages étoient réunis; perſonne ne s'apperçevoit que le Jeſuite y fût de moins. Ces éloges multipliés & qui paſſoient de bouche en bouche, commençoient à enfler le cœur de notre Peintre. Il regardoit ſon Tableau comme un protecteur qui devoit lui faire une fortune brillante. Son eſprit ne ſe repaiſſoit plus que d'un bel Hôtel qu'il auroit bien-tôt dans Paris, d'un ou deux carroſſes dans ſes remiſes, de ſix chevaux dans ſon écurie, & enfin, de la place de premier Peintre du Roi, qu'on ne pourroit lui refuſer. Malheureuſement arriva un Gaſcon ſorti recemment de ſa Province, & qui, bien différent de ceux qui ont fréquenté long-tems la Ville & la Cour, ignoroit encore l'art d'étouffer un bon mot. *Eh quadedis!* s'écria-t-il en voyant le Tableau, *voilà Monſieur le Gouverneur tout craché; c'eſt lui-même en chauſſe & en pourpoint; voilà mon bon ami le Vicomte........ comme il a l'air de petit Maître; voilà Madame la Marquiſe...... quelle eſt gentille & aimable! elle étoit hier à la Comédie, tout le monde jettoit les yeux ſur elle, & je fus cent fois ſur le point de monter à ſa Loge pour lui faire des complimens ſur ſa beauté; voilà le petit Chevalier....... laiſſez le venir, ce ſera un bon égrillard, c'eſt dommage que ſon pere le gâte un peu trop:* Et cent autres exclamations de cette nature qui ſortent abondamment de la bouche d'un Gaſcon; on eût dit qu'il montroit la lanterne magique : *Mais, Monſieur*, continua-t-il en s'adreſſant au Peintre, *que fait-là cette belle aſſemblée, toutes les figures ont les yeux tournés en haut & vers un même point? D'où vient cette attention qu'on voit ſur leur viſage?...... Quoi! Monſieur*, s'écria le

Peintre en colére, *ne voyez-vous pas que cette Architecture représente notre Cathedrale, que voilà le Grand-Autel, & voici la Chaire de notre Evêque que je n'ai point représenté, parce qu'il est à Paris pour des affaires de son Diocése; que quand tous les visages sont ainsi tournés d'un même côté dans une Eglise, & qu'ils regardent fixement à un même endroit, c'est qu'ils écoutent attentivement le Sermon qu'on leur fait? ...... Eh! pardon*, répliqua le Gascon, *je m'en doutois presque, mais je ne sçavois pas que dans votre Ville on prêchoit sans Chaire ni Prédicateur.* Je laisse à juger des risées que cette saillie excita, de la fureur du Peintre, & des fables qu'on en fit de toutes parts. Dès ce moment il ne fût plus question du Tableau que pour rappeller la plaisanterie que le Gascon en avoit faite.

J'avouë que dans cette occasion la sincérité du Gascon fut un peu trop grande; le Tableau comprenoit une infinité de belles choses; & par-là il semble qu'on pouvoit passer au Peintre la faute qu'il avoit commise; cependant il n'y avoit pas grand mal. Il ne faut rien laisser d'ambigu dans un Tableau; le principal sujet doit y briller le plus; mais aussi toutes ses dépendances doivent nécessairement s'y trouver. *Falloit-il donc*, disoit alors une Dame qui se trouvoit fort bien dans ce Tableau, *falloit-il que pour peindre le Prédicateur & la Chaire, le Peintre passât sous l'autre nef, & nous représentât tous par derriere?* Non, certainement des Tableaux ainsi faits n'ont rien de gracieux, mais il y avoit un milieu à prendre, & ce milieu consistoit à placer sa ligne principale, comme je l'ai dit ci-dessus. Je ne doute point que grand nombres de Tableaux qui sont aujourd'hui fort renommés ne fussent bien-tôt mis au rebut, si tous ceux qui les regardent étoient des Gascons aussi sincéres que celui dont je viens de parler. On dessine exactement, le coloris est beau, les teintes bien entendues; mais on péche contre la vraisemblance, on néglige les régles de la perspective, les figures sont entassées les unes sur les autres, les diminutions des grandeurs ne sont pas exactement observées, & la plupart du tems si l'on demandoit au Peintre le plan & l'élevation de ce qu'il a voulu dépeindre, on le jetteroit dans un embarras dont il ne lui seroit pas facile de se tirer. Les idées pittoresques ne sont permises qu'autant qu'elles ne s'écartent ni des régles de la Nature, ni de celles de la vrai-semblance; & qu'elles ne laissent aucune ambiguité. Un Tableau est un Livre qui parle aux yeux. Il faut qu'il parle aussi clairement que le se-

roient les objets qu'il repréſente. Tout ce qui eſt obſcur ou énigmatique ne doit point s'y trouver.

91. Lorſque la ligne principale paſſe par le milieu du plan, & que le but du Peintre eſt de repréſenter des objets ſymmétriſés; la hauteur de l'œil doit être plus grande que la hauteur naturelle d'un homme, c'eſt-à-dire que l'apparence de la ligne horizontale doit être placée aſſez haute dans le Tableau, la raiſon en eſt que ſi cette ligne étoit plus baſſe, les apparences des compartimens d'un Parterre plus éloignées de la baſe du Tableau paroîtroient trop petites & trop reſſerrées. De même s'il y avoit des Allées ou des colonnes & des piliers, &c. placés ſur des lignes perpendiculaires ſur la ligne de terre, les arbres, les colonnes, les piliers, &c. ne paroîtroient pas aſſez détachés les uns des autres, c'eſt pour la même raiſon que dans ces occaſions on peut placer les deux points de diſtance aux deux extrêmités du Tableau ou à une très-petite diſtance de ces extrêmités en-dehors; car en agiſſant ainſi, les lignes menées aux points de diſtance coupent celles qui ſont menées à ce point de vûe en des points plus éloignés de la baſe du Tableau, ce qui fait que les apparences des objets tracés ſur le plan ou élevées au-deſſus du plan ſont plus diſtinctes & ſéparées entr'elles. Il faut pourtant prendre garde de ne pas placer le point de l'œil extrêmement haut; car de-là il arriveroit que les apparences des toits des Maiſons paroîtroient trop grandes, & que les figures qu'on voudroit dépeindre ſur le terrein ſeroient trop petites & trop racourcies. Ces hauteurs de l'œil ſi élevées ne ſont bonnes que pour des plans qu'on veut repréſenter, comme on dit à vol d'oiſeau, tel qu'eſt le nouveau Plan de Paris; encore ces repréſentations ſont-elles toujours très-diſgracieuſes; & j'aimerois mieux tout uniment donner le plan des objets, comme on a coutume de faire dans les Cartes Topographiques, que de les préſenter ſous un aſpect auſſi difforme, ſous prétexte de faire voir les élevations de quelques édifices. Nous dirons plus bas de quelle maniere ſe ſont ces élevations.

92. Mais ſi le principal ſujet du Peintre eſt une action qui ſe paſſe ſur le plan, alors comme il faut rapprocher cette action vers la baſe du Tableau autant que l'on peut, & que la ſymmétrie du plan ou des objets élevées ſur le plan, n'eſt qu'une acceſſoire. Il faut placer l'œil moins haut qu'à hauteur naturelle d'un homme, deux ou trois pieds au plus ſuffiſent; par ce moyen les figures qui compoſent l'action auront leur tête au-deſſus de la ligne ho-

rizontale, ce qui fait beaucoup mieux que si la ligne horizontale étoit au-dessus ou au niveau de leur tête, & le détail de toutes les parties paroîtra beaucoup mieux. Par la même raison les points de distance doivent être hors du Tableau ; car ce qu'on voit sous un angle moindre que 90 degrés, se voit beaucoup mieux & plus distinctement que si on le voyoit sous cet angle.

93. En général les deux points de distance ne doivent être dans le Tableau que dans le cas où il s'agit de représenter des objets symmétrisés, ou qu'il est question de peindre de grands Paysages ou des grandes vûes, comme seroit celle d'une Ville qu'on voit d'un peu loin.

94. Je ne grossirai point ce petit Traité par grand nombre d'autres Remarques que je pourrois faire touchant le choix des sujets, & la maniere de donner aux figures des attitudes qui en relevent la beauté. Il me suffira de dire que si on joint à la connoissance des Régles de la Perspective, une étude assidue des Ouvrages des grands Peintres, & qu'on s'attache à examiner & suivre la Nature, on ne manquera pas de parvenir à ce goût délicat qui est l'ame de la Peinture & du Dessein.

Des erreurs de quelques Personnes en fait de Perspective.

95. Les erreurs dont nous allons parler sont d'autant plus dangereuses qu'elles paroissent fondées sur les principes les plus certains. Ces principes sont les suivans :

96. Ier PRINCIPE. *Soient deux lignes droites* AB, BC (Fig. 58.) *perpendiculaires entr'elles à leur extrêmité commune* B ; *si l'on coupe l'une des deux* BC *en plusieurs parties égales* BD, DE, EC, *& que des points de division on mene à un point quelconque* A *de l'autre ligne* AB *des droites* DA, EA, CA, *ce qui donnera des triangles égaux* BAD, EAD, CAE, *à cause qu'ils ont les bases égales & les sommets au même point* A. *Je dis que les angles aux sommets de ces triangles seront d'autant plus petits qu'ils s'éloigneront de la perpendiculaire* AB, *c'est-à-dire l'angle* BAD *sera plus grand que l'angle* DAE, *& celui-ci sera plus grand que l'angle* EAC, &c. *Ce que je prouve ainsi :*

Du point A pris pour centre & avec un rayon égal à AD, je décris l'arc RDS qui coupe les lignes voisines AB, AE aux points R, S. Les triangles ABD, ADE sont égaux, comme je viens de le dire. Or, le secteur ARD est plus grand que le triangle ABD, & le secteur ADS est plus petit que le triangle ADE ; donc le

fecteur ARD eft plus grand que le fecteur ADS ; mais les fecteurs ARD, ADS étant fecteurs d'un même cercle font entr'eux comme leurs arcs RD, DS ; donc l'arc RD du fecteur ARD eft plus grand que l'arc DS du fecteur DAS, & partant l'angle DAR mefuré par l'arc DR eft plus grand que l'angle DAS mefuré par l'arc DS. De même fi du point A pris pour centre & d'un intervale AE on décrit un arc HP entre les deux lignes voifines AD, AC, on trouvera que le fecteur HAE plus grand que le triangle DAE eft plus grand que le fecteur EAP, lequel eft moindre que le triangle EAC, & que par conféquent l'arc HE eft plus grand que l'arc PE, & l'angle HAE plus grand que l'angle EAC, & ainfi des autres.

97. *Si l'on prolonge la ligne* CB *de l'autre côté, & qu'ayant divifé fon prolongement* BM *en parties* BO, OS, SM *égales aux parties* BD, DE, &c. *on mene au point* A *les droites* OA, SA, MA, *les angles aux fommets des triangles* BAO, OAS, SAM *feront égaux chacun à chacun aux angles au fommet des triangles* BAD, DAE, EAP:

Car 1°. les triangles rectangles ABD, ABO ayant le côté AB commun & le côté BD égal au côté BO, font parfaitement égaux ; donc l'angle BAD eft égal à l'angle BAO. 2°. A caufe des triangles ABD, ABO parfaitement égaux, nous avons AO = AD, & par la conftruction OS = DE, mais l'angle AOB étant égal à l'angle ADB, l'angle AOS complement à deux droits de l'angle AOB eft égal à l'angle ADE complement à deux droits de l'angle ADB; donc les triangles AOS, ADE font parfaitement égaux, puifqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, & l'angle compris égal à l'angle compris, & par conféquent l'angle OAS eft égal à l'angle DAE, & ainfi des autres.

98. *En général fi deux triangles* AHD, APS (Fig. 59.) *ont des bafes égales* HD, PS *fur une même ligne droite* HS, *& que leurs fommets foient à un même point* A, *l'angle* HAD *au fommet du triangle* HAD *qui eft plus proche de la perpendiculaire* AB *menée fur* HS *eft plus grand que l'angle* PAS *au fommet de l'autre triangle* PAS.

Car à caufe de la bafe MS plus éloignée de la perpendiculaire AB que la bafe HD, l'oblique AM eft plus grande que l'oblique AD qui eft plus proche qu'elle de la perpendiculaire AB, & l'oblique AS eft plus grande que l'oblique AH. Ainfi les deux triangles MAS, DAH ont les bafes égales, mais les deux côtés AM, SM du triangle MAS font chacun plus grands que les côtés DA, HA

HA du triangle DAH, donc l'angle MAS est plus grand que l'angle DAH (*N.* 42.).

99. SECOND PRINCIPE. *Soit décrit sur le plan* MN *du terrein* (Fig. 60.) *un cercle* ABC *au centre* P, *duquel soit un homme debout dont l'œil est en* O, *& que du côté où il regarde soient élevées sur différents points* A, B, &c. *de la circonférence des figures d'égale hauteur* AD, BE *perpendiculaires sur le terrein. Je dis que ces figures formeront dans l'œil* O *des images égales.*

Des points D, A, E, B, je mene les droites DO, AO, EO, BO, & du centre P, je mene sur le plan du cercle les rayons PA, PB; la droite OP étant perpendiculaire sur le plan du cercle, est par conséquent perpendiculaire sur les rayons PA, PB, qui passent par son pied P; ainsi les triangles OPA, OPB sont rectangles & parfaitement égaux, à cause du côté OP commun, & du côté PA égal au côté PB, d'où il suit que l'hypothenuse OA est égale à l'hypothenuse OB, & que l'angle OAP est égal à l'angle OBP. Or, les droites AD, BE étant perpendiculaires sur le plan du cercle, sont aussi perpendiculaires sur les rayons PA, PB qui passent par leurs pieds A, B, & partant elles sont paralelles à la droite PO, laquelle est perpendiculaire sur le plan; ainsi les plans ODAP, OEBP sont perpendiculaires sur le cercle, & les angles DAP, EBP sont droits. Retranchant donc de l'angle DAP l'angle OAP, & de l'angle EBP, l'angle OBP égal à l'angle OAP, comme on vient de voir; il restera l'angle OAD égal à l'angle OBE, & par conséquent les triangles OAD, OBE qui ont le côté OA égal au côté OB, le côté DA égal au côté BE, & l'angle compris OAD égal à l'angle compris OBE sont parfaitement égaux; d'où il suit que l'angle AOD est égal à l'angle BOE; or, les angles AOD, BOE sont les angles sous lesquels l'œil O voit les figures égales AD, BE; donc à cause de l'égalité de ces angles les figures AD, BE forment dans l'œil des images égales (*N.* 33.).

100. Nota. *Si dans le plan du cercle* ABC (Fig. 61.) *on mene une corde* EF, *& que du centre* P *on mene des rayons* PI, PA, PB, PH, PL, &c. *qui coupent cette corde; & dont l'un* PB *soit perpendiculaire sur la corde* EF. *Je dis* 1°. *que de toutes les parties* RI, SA, TB, VH, XL *de ces rayons comprises entre la circonférence, & la corde la plus grande est la partie* TB *qui appartient au rayon* PB *perpendiculaire sur la corde* EF. 2°. *Que les autres parties* SA, RI, &c. *des autres rayons comprises entre la circonférence & la corde diminueront de plus en plus à mesure qu'elles appartiendront à des rayons qui s'éloigne-*

ront davantage du rayon PB. 3°. *Que celles qui appartiendront à des rayons également éloignés du rayon* PB *seront égales.*

Car 1°. la partie extérieure PT du rayon PB étant perpendiculaire sur la corde EF est plus courte que les parties extérieures PV, PS, &c. des autres rayons, lesquelles sont obliques sur la même corde. Or, tous les rayons sont égaux, donc la partie restante TB du rayon PB doit être plus grande que chacune des parties restantes SA, VH, &c. des autres rayons. 2°. Le rayon PH étant plus proche du rayon PB que le rayon PL sa partie extérieure PV est moins oblique sur la corde EH que la partie extérieure PX du rayon PL, laquelle est plus éloignée de la perpendiculaire PT; donc PV est moindre que PX, & partant la partie restante VH est plus grande que la partie restante XL, & ainsi des autres. 3°. Enfin, supposé que les rayons PA, PH soient également éloignés du rayon PB, les angles APB, HPB seront égaux, & les triangles rectangles PTS, PTV auront les trois angles égaux chacun à chacun, & seront parfaitement égaux à cause du côté PT commun; ainsi la partie extérieure PS du rayon PA sera égale à la partie extérieure PV du rayon PH, & par conséquent l'intérieure SA sera égale à l'intérieure VH. On sentira bien-tôt l'utilité de cette Remarque.

101. Ire ERREUR. Supposons que AB (*Fig.* 62.) soit la hauteur d'une grande Tour que deux hommes d'égale hauteur AC, DB soient debout l'un au pied de la Tour en AC, & l'autre en haut en DB, que P soit les pieds d'un homme qui regarde cette Tour, & dont la hauteur de l'œil est PO; si l'on demande à la plupart des Peintres & des Dessinateurs : comment on doit représenter ces deux hommes sur le Tableau? Ils ne manqueront pas de décider hardiment que l'homme en DB doit être représenté plus petit que celui qui est en AB par la raison qu'il est plus éloigné de l'œil O, & cette raison est conforme au premier principe que nous venons d'établir; car si l'on mene les rayons visuels CO, AO, DO, BO, les triangles COA, DBO qui ont les bases AC, DB égales entr'elles & sur la même droite AD, & qui ont leurs sommets au même point O seront égaux entr'eux; mais à cause que le triangle CAO est plus près de la perpendiculaire qu'on meneroit du point O sur AD que ne l'est le triangle DAB, l'angle au sommet COA est plus grand que l'angle au sommet DOB, & l'homme AC vû sous un angle plus grand fera aussi une image plus grande dans l'œil O que l'homme DB qui est vû sous un

angle plus petit (*N.* 33.). Cependant je vais faire voir que si la prétention de ces Messieurs étoit véritable, toutes les Régles de Perspective que nous avons données jusqu'ici, & qu'ils suivent eux-mêmes partout à l'exception du cas present, seroient entiérement détruites & sapées jusques aux fondemens. Ce sera à eux après cela à voir s'ils veulent tomber en contradiction, ou s'ils sont en état de démontrer la fausseté de nos Régles, & d'en établir d'autres sur la certitude & l'évidence desquelles nous puissions mieux compter.

En premier lieu donc, supposons que la ligne MX menée sur le terrein passe par les pieds P du spectateur, qu'entre l'œil & la Tour soit mis le tableau RSTV perpendiculaire sur le terrein, de façon que la ligne de terre RV soit paralelle à la ligne MX; les rayons visuels menés des points D, B, C, A, & de tous les autres points de la Tour formeront un triangle DOA, & à cause que la base DA est perpendiculaire sur le terrein de même que le tableau; ce triangle coupera le tableau en une ligne *da* perpendiculaire sur la base RV du tableau, comme nous l'avons démontré plus haut (*N.* 54.), & paralelle à DA. Ainsi la partie *db* de cette ligne sera l'apparence de l'homme DB, la partie *ca* l'apparence de l'homme CA, & la partie *ba* l'apparence de la Tour. Or, les triangles semblables DOA, *doa* donnent DO. *do* :: AO. *ao*, & à cause des triangles semblables DOB, *dob*, nous avons DB. *db* :: DO. *do*; donc DB. *db* :: AO. *ao*; mais les triangles semblables COA, *coa*, donnent AC. *ac* :: AO. *ao*; donc DB. *db* :: AC. *ac*; or, par la construction DB=AC, donc *db* = *ac*; c'est-à-dire les apparences *db*, *ac* des hommes DB, AC sont égales sur le tableau. Mais comme l'angle *dob* sous lequel *db* est vû est égal à l'angle DOB sous lequel on voyoit DB, & que l'angle *coa* sous lequel *ca* est vû est égal à l'angle COA sous lequel on voyoit CA, les apparences égales *db*, *ca* feront dans l'œil les mêmes images que feroient DB, CA, & par conséquent *db* sera vû sur le tableau plus petit que *ca*, quoique ces apparences soient égales, de même que DB étoit vû plus petit que son égal CA. Il n'est donc pas vrai qu'il faille représenter sur le tableau l'homme DB plus petit que l'homme AC, puisqu'en mettant l'apparence *db* égale à l'apparence *ac* on ne laisse pas que de voir *db* moindre que *ac*, & cela précisément dans le même rapport qu'on voyoit DB plus petit que AC, à cause que les angles visuels conservent les mêmes rapports.

En ſecond lieu, ſi l'on veut que quoique l'apparence *db* paroiſſe plus petite que l'apparence *ac*, il faille cependant la diminuer encore pour faire un meilleur effet, conſentons-y pour un moment, & faiſons cette apparence égale à *bn*. Je mene du point O le rayon O*n* que je prolonge juſqu'à ce qu'il coupe BD en N; l'angle ſous lequel *bn* ſera vû ſera donc l'angle *nob* moindre que *dob*; mais comme l'angle *nob* eſt le même que l'angle NOB ſous lequel l'œil voit la partie NB de l'homme DB; il s'enſuit que l'image que *nb* fait dans l'œil eſt la même que feroit un homme qui ſeroit au haut de la Tour, & dont la hauteur ſeroit moindre que la hauteur de l'homme AC ou de l'homme DB; ainſi l'apparence *nb* ſeroit celle d'un homme moindre que DB.

On dira ſans doute qu'à la vérité l'image que *db* fait dans l'œil eſt la même que celle que DB y feroit, mais que l'ame ne s'en tient pas toujours à l'image faite ſur la retine par les objets, & qu'il y a bien des occaſions où une même image donne différentes perceptions, ainſi que je l'ai moi-même remarqué plus haut (*N. 36.*). Or, à cela je répons que pour faire que le tableau donne à l'ame les mêmes perceptions que lui donneroient les objets. Le meilleur moyen, le plus ſûr & même l'unique, eſt de repréſenter ces objets avec toutes les circonſtances qui les environnent & chaque choſe ſous l'angle ſous laquelle elle eſt vûe; ſi la Tour eſt fort élevée au-deſſus des autres édifices, ſi ſon ſommet eſt uniquement environné d'air, ſi on la voit juſqu'au pied ou ſi quelque objet interpoſé ne nous en laiſſe voir que la partie ſupérieure, &c. Toutes ces circonſtances doivent ſe trouver dans le tableau, & dès-lors les apparences ne manqueront pas de faire le même effet que la réalité, à condition cependant qu'on obſerve les diminutions des teintes ſelon les éloignemens, & que les objets plus diſtans de l'œil ne ſoient pas deſſinés avec toute la recherche avec laquelle on en deſſineroit un autre ſemblable qui ſeroit plus proche du ſpectateur. Un homme qui eſt au haut d'une grande Tour n'eſt pas vû ſi diſtinctement qu'un autre qui ſeroit au bas. Ce ſeroit donc une faute conſidérable de vouloir marquer tous ſes traits, & de le colorer avec la même vivacité de teintes. J'ai vû plus d'une fois des tableaux être admirés par des ignorans, à cauſe que dans les figures qui étoient dans le lointain on y voyoit les yeux, la bouche, le nez, les doigts, leurs articulations, les ongles, &c. le tout avec la même netteté que ſi ç'avoient été des grandes figures miſes ſur le devant du tableau;

mais je n'ai jamais vû des personnes un peu entendues faire grand cas de ces sortes d'ouvrages. Bosse, célebre Graveur & très-habile en fait de Perspective, de Peinture & de Dessein, a fait un Livre intitulé: Le Peintre converti aux regles de son Art, & ce titre m'a toujours paru avoir une énergie à laquelle peut-être Bosse ne pensoit pas. En effet, la plûpart des Peintres qui ont l'imagination belle, le pinceau brillant & le dessin hardi, se donnent souvent des licences qu'ils nomment recherches & délicatesses de l'Art, mais qui ne sont à vrai dire que des fausses applications de quelques principes d'Optique mal entendus; nous venons d'en voir un exemple; mais de peur qu'ils ne se rendent pas encore aux preuves que je viens de donner, & qu'ils ne s'imaginent au contraire qu'on veut ôter de leurs ouvrages ce qu'il y a de plus beau, & les réduire par-là au rang des Peintres ordinaires, achevons, s'il se peut, d'operer leur conversion, ou du moins voyons ce qu'ils auront à répondre aux nouvelles preuves que je vais leur opposer.

En troisiéme lieu, (*Fig. 63.*) je porte sur la hauteur AB de la tour, la hauteur AC de l'homme AC, de A en C, de C en E, de E en F, &c. jusqu'en B, soit que la hauteur AB contienne AC un certain nombre de fois exactement, ou qu'elle le contienne un certain nombre de fois avec un reste; des points de division A, C, E, F, & je mene des rayons visuels à l'œil O, les angles EOC, COA, sont égaux à cause qu'ils sont faits de part & d'autre de la droite OC perpendiculaire sur BA; ainsi les deux parties égales EC, CA de la tour étant vûes sous des angles égaux paroissent égales; mais comme les autres angles FOE, &c. s'éloignent de la perpendiculaire OC, ils deviennent petits de plus en plus, & par conséquent les autres parties égales FE, &c. de la tour étant vûes sous des angles qui vont en diminuant paroissent à l'œil O d'autant plus petites qu'elles s'éloignent de la perpendiculaire OC, ou qu'elles s'approchent du sommet B de la tour. Or je demande à ceux qui prétendent qu'il faut dépeindre l'homme DB plus petit que l'homme AC, s'il faut aussi dépeindre les parties de la tour qui sont du côté de B plus petites que celles du côté de A. Si on répond que les parties de la tour doivent être représentées égales, je demande pourquoi donc il faut dépeindre l'homme DB plus petit que l'homme AC? car de même que l'homme DB paroît plus petit que l'homme AC, les parties égales de la tour du côté de B paroissent aussi plus petites que

celles qui sont du côté de A; la raison étant la même de part & d'autre, la diminution des représentations doit l'être aussi à proportion des éloignemens. Si au contraire, on répond que ces parties égales de la tour doivent être représentées inégales pour les raisons que je viens d'alléguer, je remets le tableau entre l'œil & la tour, comme ci-dessus, & je leur démontrerai que l'apparence *ba* de la tour BA étant paralelle à BA, est divisée en parties proportionnelles à celles de la tour, & partant en parties égales; mais que de même que les parties égales de la tour sont vûes inégales par l'œil O, de même les parties égales de l'apparence *ba* sont vûës inégales aussi à cause que les angles sous lesquels on voyoit les parties égales de la tour sont les mêmes angles sous lesquels on voit les parties égales de son apparence *ba*. Enfin, si l'on prétend que malgré tout ce que je viens de dire, on doive diminuer encore les apparences sur le tableau afin que l'ame s'apperçoive mieux des inégalités, je démontrerai comme auparavant que l'apparence de la tour & celles de ses parties seront vûes sous des angles plus petits que ceux sous lesquels on voyoit la tour & ses parties, & que la diversité de ces angles & la diminution des images dans l'œil dérouteront totalement les jugemens de l'ame, d'autant plus que ces jugemens naturels & involontaires dépendent, non pas du caprice de ceux qui dessinent, mais des rapports fixes & constans que la Nature a établi entre les images des objets & les angles sous lesquels on les voit.

Mais allons plus loin, & supposons que la ligne A1, (*Fig.* 64.) paralelle à la ligne MZ qui passe par les pieds du spectateur soit la base de la face AB81 de la tour AB opposée à l'œil O; je divise comme auparavant la hauteur AB en parties égales à la hauteur AC, & des points de division je mene entre les deux coins AB, 18 les droites C2, E3, F4, &c. paralelles à A1; ainsi supposant que les deux coins AB, 18 soient parfaitement d'aplomb, les droites A1, C2, E3, F4, &c. seront égales; mais à cause que les triangles visuels à qui ces lignes égales servent de base ont les côtés plus longs à mesure qu'ils s'éloignent davantage du triangle CO2 perpendiculaire sur la tour, les angles au sommet O deviennent aussi plus petits, & les lignes égales C2, E3, F4, &c. paroissent d'autant plus petites qu'elles s'approchent davantage du sommet B de la tour. Or je demande si ces parties égales C2, E3, F4 doivent être représentées sur le tableau égales ou inégales. Si on prétend qu'elles doivent être représentées égales; donc

l'homme BD devra être aussi représenté égal à l'homme AC, il n'y a pas plus de raison d'une part que de l'autre, & si on veut qu'on les représente inégales, il s'ensuivra que cette Tour sera dessinée sur le tableau, comme un trapezoïde plus large par le bas que par le haut. Et je laisse à juger si une pareille représentation auroit quelque chose de bien gracieux.

Tout ce que je viens de dire fait assez voir que l'Erreur que j'attaque renverse la plupart des Principes de la Perspective; mais pour achever de montrer qu'elle les sape tous, soit le plan ABCD (*Fig.* 65.) dont la principale est MN, le point du spectateur en quelque point R de MN prolongée, & sur ce plan soit mené la droite EF paralelle à la ligne de terre AB & coupée en parties égales ES, SX, XO, &c. Enfin, des points de division soient menées des perpendiculaires EA, ST, XZ, &c. sur la ligne de terre; il est clair que les parties égales ES, SX, XO comprises entre le point E & la principale MN étant inégalement éloignées du spectateur R lui paroîtront inégales, que ES lui paroîtra plus petite que SX, & SX plus petite que XO, & la même chose arrivera à l'égard des parties égales qui sont entre le point F & la principale MN; de même la perpendiculaire EA plus éloignée de l'œil paroîtra plus petite que la perpendiculaire ST; celle-ci paroîtra plus petite que XZ, & ainsi de suite jusqu'à la perpendiculaire ON qui paroîtra la plus grande; après quoi les autres paroîtront aller en diminuant jusqu'à la perpendiculaire FB. Cependant si je veux représenter toutes ces lignes sur un tableau *abcd* en perspective : il faut, selon les régles suivies par ceux mêmes que nous attaquons ici, porter les distances NZ, NT, NA, &c. sur la base du tableau de *n* en *z*, de *n* en *t*, &c. tirer des points de division *n*, *z*, *t*, &c. les droites *nr*, *zr*, *tr*, &c. prendre la grandeur AE de l'une des perpendiculaires égales AE, TS, &c. & la porter sur la base du tableau de *a* en *y*; mener du point *y* la droite *yl* à l'apparence *l* du point de distance opposé; enfin, du point *e* mener entre les lignes *ar*, *br*, la droite *ef* paralelle à la base. Cela fait, la droite *ef* est l'apparence de la droite EF, ses parties *es*, *sx*, *xo*, &c. sont les apparences des parties ES, SX, XO, &c. de la droite EF, les droites *ea*, *st*, *xz*, *on*, &c. sont les apparences des perpendiculaires EA, ST, XZ, ON, &c. & si l'on conçoit que le tableau soit mis perpendiculairement sur le terrein, ensorte que la base *ab* tombe sur la ligne de terre AB, & le point *n* sur le point N, & que l'œil soit élevé

au-dessus du point R d'une hauteur égale à *al*, toutes les lignes *if*, *es*, *sx*, &c. *ae*, *ts*, &c. feront les mêmes images dans l'œil que les lignes EF, ES, SX, &c. AE, TS, &c. du terrein, à cause que les unes & les autres feront vûes sous les mêmes angles. Or, si nous considérons les choses de près, & le compas à la main, nous trouverons que les apparences *es*, *sx*, *xo*, &c. sont égales entr'elles, de même que les droites ES, SX, XO, &c. dont elles sont les apparences, & qu'au contraire les droites *ae*, *ts*, *zx*, *xo*, qui sont les apparences des perpendiculaires égales AE, TS, ZX, vont en diminuant à mesure qu'elles approchent de *on*, car *on* étant perpendiculaire entre les paralelles *ef*, *ab* est plus courte que *xz*; celle-ci étant moins oblique entre les mêmes paralelles que *ts*, est par conséquent plus courte que *ts*, & par la même raison *ts* est plus courte que *ae*. Il n'est donc pas vrai que ce qui paroît plus petit doive toujours être représenté plus petit sur le tableau, puisque nous voyons ici qu'il y a des objets qui nous paroissent aller en augmentant, tels que sont les parties ES, SX, XO, &c. & dont les apparences sur le tableau sont égales, & d'autres qui nous paroissent aussi aller en augmentant, tels que sont les perpendiculaires AE, TS, &c. & dont les apparences *ae*, *ts*, &c. vont en diminuant; mais il est toujours vrai qu'on doit dépeindre sur le tableau les objets sous les mêmes angles sous lesquels on les voit, & avec toutes leurs circonstances, puisque nous éprouvons toujours qu'en observant ces régles, le tableau fait le même effet sur nous que le feroient les objets qu'il représente.

Le Pere Lami voulant nous faire voir qu'il n'est pas vrai en général que les objets qui sont vûs sous les mêmes angles nous paroissent égaux; nous objecte en deux ou trois endroits de sa Perspective l'exemple de la Lune qui nous paroît plus grande quand elle est directement à l'horizon, que lorsqu'elle est élevée au-dessus. Ce phénomene peut venir de deux causes, la premiere est que la Lune étant à l'horizon, son image & celle des terres interposées entr'elle & nous, sont contigues dans notre œil, & comme l'horizon de terre ne s'étend guéres au-delà de huit ou neuf lieuës, & que notre ame n'apperçoit aucune séparation entre la Lune & l'horizon, elle juge la Lune plus proche que lorsqu'étant élevée au dessus elle lui paroît isolée; ainsi elle s'en forme une perception plus grande, quoique dans l'un & l'autre cas l'image dans l'œil soit la même; & la même chose arrive sur la

Mer

Mer dont l'horizon eſt un peu plus étendu que celui de terre. La ſeconde cauſe eſt qu'il s'éleve du ſein de la terre des vapeurs à travers leſquelles paſſent les rayons de la Lune qui entrent dans la prunelle, ce qui fait que ces rayons ſouffrent des refractions qui peuvent occaſionner une plus grande image dans l'œil. Or, 1°. un Peintre qui veut repréſenter une Lune qui s'éleve, ne la dépeint pas toute ſeule & iſolée, il y met l'horizon ſoit de terre ou de mer, & les objets interpoſés. Ainſi les mêmes circonſtances ſe trouvant ſur le tableau, la Lune dépeinte de la même grandeur fera la même image dans nos yeux, & l'ame en conſéquence de ſes jugemens naturels s'en formera une perception plus grande, & qui ſera préciſément la même que celle qu'elle ſe formoit en voyant la Lune à l'horizon. 2°. Les vapeurs qui s'élevent du ſein de la terre ne ſont pas toujours en même quantité, il y en a tantôt plus tantôt moins, & quelquefois point du tout, ou du moins très-peu; ainſi il eſt toujours libre au Peintre de ſuppoſer qu'il a fait ſon tableau dans un tems où ces vapeurs n'altéroient pas ſenſiblement l'image de la Lune. Nous rapporterons plus bas une autre raiſon dont le Pere Lami prétend s'appuyer pour détruire la régle que nous avons établie, & la foibleſſe de ſa démonſtration nous fera voir qu'il eſt bien difficile de raiſonner en homme d'eſprit, lorſqu'on veut s'en prendre à des principes qui portent avec eux la certitude & la conviction.

102. IIe ERREUR. Soit ſur le plan ABCD (*Fig. 66.*) le point P les pieds du ſpectateur, la ligne de terre EF, ſur laquelle eſt élevé perpendiculairement le plan EFGH du tableau, la principale PQ, le point de l'œil O, & la droite PO la hauteur de l'œil au-deſſus du plan ABCD. Du centre P, & avec un rayon plus grand que PQ ſoit décrit ſur le plan du terrein un arc de cercle EXLF dont la ligne de terre EF ſoit la corde ſur laquelle la principale PQ ſera par conſéquent perpendiculaire; enfin, ſur pluſieurs points X, L, &c. de cet arc ſoient élevées perpendiculairement ſur le terrein des figures d'égale hauteur XM, LN, &c. Le ſentiment de quelques Peintres fameux, eſt que les figures égales XM, LN, &c. doivent être repréſentées égales ſur le tableau, par la raiſon que l'œil mis en O les voit égales, comme nous l'avons démontré dans le ſecond Principe ci-deſſus (*N. 99.*); or, comme cette façon de penſer n'eſt encore qu'une mauvaiſe application de ce Principe, laquelle tend à détruire les Régles les

plus certaines de la Perspective ; il est à propos d'en mettre la fausseté dans tout son jour. Ce que je fais ainsi :

Je mene les rayons visuels OM, OX, ON, OL ; les triangles OXP, OLP étant perpendiculaires sur le plan du terrein (*N.* 99.), de même que le plan EFHG du tableau, les droites *Sx*, Q*l*, dans lesquelles ces triangles coupent le tableau sont perpendiculaires sur le terrein, & par conséquent paralelles entr'elles, & à la droite PO. Ainsi les triangles OXP, *x*XS sont semblables, & donnent PX. OX :: SX. X*x* ; par la même raison les triangles PLO, QL*l* étant semblables, nous avons PL. LO :: QL. L*l* ; or, les triangles PXO, PLO étant parfaitement égaux (*N.* 99.) donnent PX = PL & OX = LO ; donc SX. X*x* :: QL. L*l* ; mais à cause que PL est perpendiculaire sur la corde EF, la droite SX est plus petite que la droite QL (*N.* 100.) ; donc la droite X*x* est aussi plus petite que la droite L*l*, & comme à cause des triangles parfaitement égaux OXM, OLN, nous avons OX = OL, nous avons aussi O*x* plus grand que O*l*. Maintenant à cause que MX & LN sont perpendiculaires sur le terrein, le tableau EFHG qui est aussi perpendiculaire sur le terrein, coupe les triangles visuels OXM, OLN, en des lignes *mx*, *nl* paralelles aux bases MX, LN de ces triangles ; ainsi les triangles semblables OXM, O*xm* donnent OX. XM :: O*x*. *xm*, & à cause des triangles semblables OLN, O*ln*, nous avons OL. LN :: O*l*. *ln* ; mais nous avons OX = OL & XM = LN, donc O*x*. *xm* :: O*l*. *ln* ; or, O*x* est plus grand que O*l*, donc *xm* est plus grand que *ln*, c'est-à-dire l'apparence *mx* de la droite MX est plus grande que l'apparence *nl* de la droite NL égale à la droite MX, & on prouvera de la même façon que les apparences des lignes égales élevées perpendiculairement sur le terrein, & sur les points de l'arc EXLF seront d'autant plus grandes que ces lignes seront plus éloignées de celle qui est élevée à l'extrêmité L du rayon PL qui coupe la corde EF en deux également ; mais comme ces apparences inégales seront vûes sous les mêmes angles sous lesquels on voyoit les lignes égales qu'elles représentent, elles formeront des images égales dans l'œil, & elles seront vûes égales. Il est donc faux qu'il faille représenter les figures XM, LN égales sur le tableau, par la raison qu'elles le sont sur le terrein, & qu'elles paroissent égales à l'œil. Je dis bien plus, c'est que si on représentoit LN plus grand que

ln, alors cette repréſentation étant vûe ſous un angle plus grand nous paroîtroit plus grande que la repréſentation *mx* qui ſeroit vûe ſous un angle moindre ; d'où il arriveroit que nous le jugerions plus proche de l'œil, & que par conſéquent la repréſentation de la courbure EXLF, nous paroîtroit tourner ſa convexité du côté de l'œil, au lieu qu'elle doit paroître tourner ſa concavité de ce côté ; ainſi le tableau nous paroîtroit s'avancer vers nous par le milieu & s'éloigner par les extrêmités. Mais en voilà aſſez pour faire voir combien il eſt dangereux d'abandonner les régles ſûres & évidentes de la Perſpective, ſous prétexte qu'elles paroiſſent contraires à quelques Théoremes d'Optique que l'on interpréte mal.

De quelle façon un Sculpteur doit faire une Statue qu'on veut mettre au haut d'une Tour fort élevée, enſorte que ceux qui la regarderont d'en bas, la voyent égale à la hauteur naturelle d'un homme.

103. Avant de répondre à cette queſtion, je poſe pour principe inconteſtable que *nous ne voyons jamais toutes les parties d'un objet dans le rapport naturel qu'elles ont entr'elles, & que pour les voir de la maniere la plus approchante de ce rapport, il faut que l'objet qu'on regarde ſoit la baſe d'un triangle iſoſcele dont les côtés égaux ſoient les deux rayons viſuels menés des deux extrêmités de l'objet à l'œil.*

Pour démontrer cet eſpece de paradoxe, ſoit l'œil O (*Fig. 67.*) au ſommet O du triangle iſoſcele AOB ; je diviſe la baſe AB en parties égales en nombre pair ; par exemple, en ſix, & des points de diviſion menant des lignes au ſommet O, j'ai ſix triangles égaux ; or, à cauſe que la baſe AB eſt diviſée en deux également en E, & que par conſéquent le rayon OE eſt perpendiculaire ſur cette baſe, les deux angles DOE, FOE autour de cette perpendiculaire ſont égaux (*N. 97.*), & les parties égales DE, EF de la baſe AB paroiſſent égales à l'œil ; de même les angles COD, HOF également éloignés de la perpendiculaire OE étant égaux, les deux parties égales CD, HF de la baſe AB paroiſſent égales à l'œil, mais moindres que les deux CD, FH, à cauſe que les angles COD, HOF, ſont moindres que les angles DOE, FOE, & par les mêmes raiſons les deux parties égales AC, BH de la baſe AB paroiſſent égales entr'elles ; mais moindres que les deux

CD, FH. Donc dans cette position de l'objet, les parties égales ne paroissent égales que deux à deux, & par conséquent l'œil ne les voit pas dans le véritable rapport qu'elles ont entr'elles. Il ne reste donc plus qu'à faire voir que si l'on met l'objet dans telle autre position que l'on voudra, l'œil verra ces parties égales d'une maniere encore plus éloignée de leur véritable rapporr.

Soit donc le triangle scalene OAB (*Fig.* 68.) au sommet duquel est l'œil O, & dont la base est la ligne AB divisée en six parties égales ; je mene du sommet O la perpendiculaire OF sur la base, & supposant que cette perpendiculaire tombe sur le point F ; il est clair que les deux parties EF, FH paroîtront égales à l'œil, que les deux DE, HB paroîtront aussi égales, mais moindres que les deux précédentes (*N.* 97.), & que les deux CD, AC paroîtront inégales entr'elles & moindres chacune que les précédentes ; ainsi l'œil verra les parties égales de la ligne AB d'une façon moins approchante de leur véritable rapport que dans le cas précédent ; & comme plus la perpendiculaire menée du sommet sur la base s'éloignera du milieu E, plus aussi les parties égales de AB paroîtront inégales à l'œil ; il s'ensuit que dans aucun cas l'œil ne voit les parties égales d'un objet dans leur véritable rapport, & qu'il ne les voit jamais d'une façon plus approchante que lorsque la perpendiculaire menée de l'œil sur l'objet passe par son milieu.

104. *Nota.* Il est bon d'observer en passant que si la base AB (*Fig.* 67.) d'un triangle isoscele AOB est divisée en parties égales, & qu'après avoir mené des points de division des droites au sommet O, on mene entre ces droites prolongées, s'il le faut, une ligne MN qui ne soit pas paralelle à la base AB, cette ligne sera divisée par les lignes menées aux points de division de la base en parties toutes inégales entr'elles, les plus grandes seront celles qui seront plus éloignées du sommet O, & les moindres seront celles qui en seront plus proches. Ce que je prouve ainsi :

Du point S, je mene RP paralelle à AB, & à cause que la droite AD comprise entre les droites OA, OC est coupée en deux parties égales par la droite OC, la droite RP paralelle à AD, & comprise entre les droites OA, OD prolongées est aussi coupée en deux parties égales par la droite OC prolongée en S ; ainsi nous avons RS = SP ; or, les triangles RSN, QSP ont le côté RS, égal au côté SP, l'angle RSN égal à l'angle QSP qui

lui est opposé, mais l'angle obtus SRN est plus grand que l'angle SPQ ; c'est pourquoi si je mets le triangle QSP sur le triangle RSN, ensorte que le côté SP tombe sur son égal RS & l'angle QSP sur son égal NSR l'angle SPQ tombera en-dedans de l'angle obtus SRN en SRX ; donc le côté QS tombera sur SX plus courte que SN, & partant la partie NS de la droite NM sera plus grande que la partie QS, & on prouvera de même que les autres parties de NM vont en diminuant à mesure qu'elles approchent du point M plus proche du sommet O. Tout ceci posé, venons à la solution de la question proposée.

105. Soit donc AB (*Fig. 69.*), la hauteur d'une Tour au sommet de laquelle un Statuaire veut mettre une Statue qui paroisse de la même grandeur que le paroîtroit un homme qui seroit au pied de la Tour, & dont la hauteur seroit la droite AC. Du point C, j'éleve sur la hauteur de la Tour une perpendiculaire indéfinie, & j'observe que si je prenois sur cette perpendiculaire une partie EC égale à la partie CB de la hauteur de la Tour, & que je voulusse supposer que l'œil du spectateur fût en E, cet œil ne verroit rien au-delà du sommet B de la Tour. Car menant la droite BE, l'angle BEC seroit de 45 degrés, & faisant de l'autre côté de EC un autre angle REC de 45 degrés, l'angle droit REB renfermeroit tout ce que l'œil peut appercevoir ; or, pour bien voir la Statue qu'on veut mettre en B, il faut que l'œil puisse voir non-seulement la Statue, mais encore une partie du Ciel. Donc il faut que je recule la position de l'œil en quelque point O au-delà de E ; ce point O étant ainsi déterminé, je coupe la hauteur AC en deux parties égales AD, DC, & prenant CL = CD, ce qui donne LD = CA, j'observe encore qu'un homme qui auroit la position LD seroit vû beaucoup plus parfaitement que s'il avoit la position CA, à cause du rayon OC perpendiculaire sur le milieu de LD (*N.* 103.). Je mene donc les rayons visuels LO, DO, & l'angle sous lequel je vois l'homme en LD est l'angle LOD. Or, il faut que la Statue qu'on veut mettre en B fasse dans l'œil O un image égale à celle que fait LD ; c'est pourquoi je mene de l'œil O le rayon visuel OB au sommet B de la Tour, & faisant en O avec le rayon OB un angle POB égal à l'angle LOD, & qui coupe en P la hauteur AB de la Tour prolongée, je dis que PB sera la hauteur que le Statuaire doit donner à sa Statue, car PB & LD étant vûs sous les mêmes angles paroîtront égaux.

Nota, 1°. Que la hauteur PB sera plus grande que la hauteur LD; car si elles étoient égales, l'angle visuel POB plus éloigné de la perpendiculaire OC seroit plus petit que l'angle visuel LOD; or par la construction, l'angle POB est égal à l'angle LOD; donc il faut nécessairement que la base PB soit plus grande que la base LD.

Nota, 2°. Qu'il n'y a pas à craindre que la statue PB paroisse plus grande qu'il ne faut; car les images de PB, LD étant égales dans l'œil, & celle de PB étant isolée au milieu de l'air, au lieu que celle de LD est environnée d'autres objets, il y auroit plutôt à craindre que l'ame ne se fît une perception plus grande de LD que de PB; ce qui pourtant n'arrivera pas, à cause que la statue n'est pas totalement détachée de la tour, & qu'elle y tient du moins par les pieds, & cela occasionnera dans l'ame, je ne dis pas un jugement naturel, mais un jugement volontaire par lequel elle dira : les images de PB, LD me paroissent égales, mais PB est plus éloigné de mon œil que LD; donc il faut que l'ouvrier ait fait PB plus grand que LD, & cet ouvrier a fort bien fait, car autrement sa statue me paroîtroit trop petite, & je n'en verrois pas toutes les beautés comme je les vois.

106. Maintenant pour trouver de quelle façon le statuaire doit travailler les differentes parties de la statue PB, je prens sur le rayon OP une partie OQ égale au rayon OB, & je mene la droite QB, ce qui donne un triangle isoscele QOB, dont la droite QB est la base. Ainsi une statue qui seroit de la grandeur QB & qui auroit la position QB paroîtroit égale à la statue qui auroit la grandeur PB & qui auroit la position PB, à cause qu'elles seroient vûes sous le même angle, mais les differentes parties de la statue QB seroient vûes d'une maniere plus approchante de leurs véritables rapports que celles de la statue PB (*N.* 103.) pour faire donc ensorte que les differentes parties de la statue PB paroissent de la même grandeur que celles de la statue QB, je porte sur QB les grandeurs des parties de la statue QB selon les rapports naturels qu'elles ont entr'elles; & supposant que QR soit la grandeur de la tête, je mene du point O par le point R le rayon OR qui coupe PB en *r*, & la partie P*r* de PB est la hauteur qu'on doit donner à la tête de la statue PB. Car la tête QR & la tête P*r* étant vûes sous les mêmes angles paroîtront égales, de même que la statue QB & la statue PB; & faisant la même chose à l'é-

gard des autres parties de la ſtatue QB, on aura les differentes grandeurs des parties de la ſtatue PB.

Or il arrivera qu'en agiſſant ainſi, les parties de la ſtatue PB n'auront plus le même rapport entr'elles que celles de la ſtatue QB; car à cauſe que les droites QP, R*r* qui coupent les côtés de l'angle EBP ne ſont pas paralelles, & que R*r* s'éloigne davantage de QP du côté de *r* que du côté de R, on aura P*r* plus grand par rapport à PB que QR par rapport à QB, c'eſt pourquoi la tête P*r* ſera plus grande par rapport à la ſtatue PB que la tête QR par rapport à la ſtatue QB, & par conſéquent les autres parties de la ſtatue PB perdront de leur véritable rapport, de façon que celles du côté de B ſeront plus petites par rapport à la ſtatue PB que celles de QB du côté de B par rapport à QB; mais cela doit être ainſi, puiſque par ce moyen les parties de PB paroiſſent égales aux parties de QB que l'œil voit de la façon la plus approchante de leur véritable rapport.

Je ſçais bien qu'un Sculpteur qui travailleroit aux yeux de tout le monde une ſtatue ſelon les regles que nous venons de donner, ne manqueroit pas de s'attirer la riſée des ignorans; mais je ſuis perſuadé que la ſtatue ſeroit à peine placée dans le lieu deſtiné, que les riſées ſe changeroient en admiration, comme il arriva autrefois au célebre Sculpteur Phidias. Les Athéniens, au rapport de Tzetzez, ayant déliberé d'ériger une ſtatue à Minerve ſur une haute colonne, ordonnerent à Phidias & à Alcamene de faire chacun la ſtatue de cette Déeſſe, dans le deſſein de choiſir celle qui conviendroit le mieux. L'ouvrage étant achevé de part & d'autre, la ſtatue d'Alcamene vûe de près parut délicate, gracieuſe & dans toute la perfection qu'on pouvoit ſouhaiter; au contraire celle de Phidias paroiſſoit giganteſque, monſtrueuſe & ſi diſproportionnée dans toutes ſes parties, qu'on fut ſur le point de la lapider. On éleva donc avec des grandes acclamations la Minerve d'Alcamene; mais quel fut l'étonnement des Athéniens, lorſque cette ſtatue étant au haut de la colonne ne parut plus que comme un Pigmée dont on ne diſtinguoit point les traits, & que celle de Phidias dont on voulut faire l'eſſai parut d'une beauté encore plus parfaite que tout ce que l'art d'Alcamene avoit pû imaginer. C'eſt ainſi que Phidias ſe fit un nom immortel, & que celui d'Alcamene ne ſemble être parvenu juſqu'à nous que pour perpétuer les mépris piquans que ſon ignorance lui attira.

107. Le Pere Tacquet Jésuite est le premier qui dans son Optique a donné la maniere de trouver la hauteur PB que le Statuaire doit donner à une statue mise au haut d'une tour, & c'est sur ses principes que j'ai déterminé la grandeur qu'il doit donner aux differentes parties de cette statue. Or, quoique le sentiment de ce sçavant Géometre soit d'une évidence à laquelle il n'y a point de réplique, cependant le Pere Lami a crû devoir le citer comme un exemple des erreurs grossieres qu'on peut commettre dans la Science dont nous traitons; les raisons sur lesquelles il s'appuye sont si foibles & si futiles, qu'on pourroit croire que je veux en imposer, si je ne rapportois les propres paroles de cet Auteur.

Plusieurs avancent, dit-il, *comme un axiome une proposition qui en plusieurs occasions est fausse & capable de faire faire de grandes fautes dans la pratique de la Perspective. Ils prétendent que les choses que l'on voit sous des angles égaux ont les apparences égales ou paroissent d'une égale grandeur; d'où le Pere Tacquet conclut que si on vouloit élever au-dessus de la colonne* BD, (Fig. 70.) *une statue ou ligne qui parut égale à* BC, *il faudroit après avoir tiré la ligne* AD *prendre l'arc* ef *égal à* bd, *& mener par* f *la ligne* AE *qui donneroit la ligne* DE *qui selon lui paroîtroit égale à* BC, *puisqu'elle est vûe sous un angle égal.*

Il y a d'abord ici une inexactitude dans le discours qui pourroit jetter dans l'erreur; il est vrai que nous disons que les choses qu'on voit sous les mêmes angles forment des images égales dans l'œil, mais nous ne disons point que leurs apparences sur le tableau soient égales. Car on a vû ci-dessus qu'il y a des occasions où les apparences des choses égales vont en diminuant, & cela vaut bien la peine que nous y fassions faire attention. Après ceci, le Pere Lami nous enseigne que la proposition qu'il critique n'est vraie que lorsque les objets sont proches, mais que dans l'éloignement les mêmes grandeurs ont differentes apparences selon la diversité des jugemens naturels que nous faisons de leurs distances; que c'est de-là que le Soleil & la lune nous paroissent beaucoup plus grands & plus proches de nous, quand ils sont sur l'horizon que lorsqu'ils sont sur nos têtes, & qu'enfin on peut voir ce que le Pere Malebranche en a dit dans la Recherche de la Vérité & dans ses Eclaircissemens. Or, comme j'ai déja répondu abondamment à ce qui regarde les jugemens naturels de l'ame, & que le Pere Malebranche qui parle si souvent de ces jugemens

jugemens naturels, n'a cependant jamais dit nulle part qu'un Peintre dût dépeindre les objets autrement que ſous les angles ſous leſquels on les voit; je ne m'arrêterai pas davantage ſur cet article, & je viens à l'examen de la prétendue démonſtration que le Pere Lami donne contre la propoſition du Pere Tacquet.

Pour démontrer, continue-t'il, *la fauſſeté de cette propoſition que le Pere Tacquet prend pour un axiome, que ce qui eſt vû ſous un même angle paroît égal, ſoit l'œil en* A, *& qu'il faille mettre ſur une colonne* BD *un objet qui lui paroiſſe égale à* BC. *Si l'angle* bAd *étoit demi droit, il faudroit ſelon l'axiome prétendu que l'angle* DAE *fût égal à l'angle* bAd, *afin que* DE *parut égal à* BD. *Or il n'eſt pas poſſible en ce cas que ces deux angles ſoient égaux quand* DE *ſeroit infinie; car* Ag *étant paralelle à* BE, *l'angle* DAE *ſeroit toujours moindre que l'angle* BAC *qu'on ſuppoſeroit de 45 degrés; mais enfin quand il ſeroit peu different, alors* DE *ſeroit preſque infinie. Cependant ſelon l'axiome elle paroîtroit plus petite que* BC, *ce qui eſt contraire à l'expérience.*

Tout ce raiſonnement n'eſt fondé que ſur une ſuppoſition abſurde, impoſſible & abſolument contraire aux principes que le Pere Lami lui-même a établi dans ſon Traité; l'angle CAB ne peut être demi droit, à moins que l'œil ne ſoit en un point R éloigné de la tour d'une diſtance RB égale à la hauteur BC, c'eſt-à-dire d'environ cinq ou ſix pieds. Or, on n'a jamais imaginé, & il n'eſt pas même poſſible de penſer qu'on puiſſe voir une ſtatue miſe au haut d'une tour extrêmement élevée en ſe tenant à cinq ou ſix pieds de diſtance de cette tour; donc la ſuppoſition eſt fauſſe & le raiſonnement auſſi. Pour bien voir d'un coup d'œil la tour, les ſtatues PB, LD, (*Fig. 69.*) & les comparer enſemble, il faut comme j'ai dit ci-deſſus, que l'œil ſoit en un point O tel que l'angle MOD de 45 degrés comprenne non-ſeulement tous ces objets, mais encore une partie du ciel; ainſi l'angle LOD doit néceſſairement être bien au deſſous de 45 degrés.

108. Ce qu'il y a de ſurprenant dans ce raiſonnement du Pere Lami, c'eſt qu'après nous avoir dit dans un autre endroit qu'il n'y a point de regle certaine pour juger quelle doit être la grandeur d'une ſtatue poſée dans un lieu élevé afin qu'elle paroiſſe dans ſa grandeur naturelle, que la regle que donne le Pere Tacquet ne s'accorde pas avec l'experience & ne ſatisfait pas l'œil, & que c'eſt ce qui oblige les Peintres, Sculpteurs & Architectes dans les ouvrages de conſéquence de faire des experiences auxquelles il dit qu'il faut toujours avoir recours dans les occaſions;

il nous donne cependant pour regle sure la pratique du chassis dont se servent les Peintres, & qui n'est bonne que parce qu'elle est fondée sur les principes que j'ai établis ci-dessus après le Pere Tacquet.

109. Pour expliquer en peu de mots ce que c'est que ce chassis, & quelle est la meilleure façon de s'en servir, supposons comme ci-dessus, qu'un Sculpteur veuille faire une statue qu'on doit placer au haut de la tour AB, (*Fig. 69.*) & qui doive paroître de la même grandeur d'une statue qui seroit en LD; je cherche comme ci-dessus le point O de l'œil, &c. je fais sur une toile ou sur du carton une esquisse de la statue dans l'attitude qu'elle doit avoir & dont la hauteur soit égale à LD. Je divise cette esquisse en petits quarrés égaux entr'eux, & je la place en LD; je prens un chassis composé de quatre regles mouvantes qui puissent s'approcher & s'éloigner comme on voudra; je me mets en O, & j'envoye un homme au haut de la tour, à qui j'ordonne de mettre le chassis dans une position inclinée vers O, & d'écarter ou d'appocher les regles du chassis jusqu'à ce qu'il me paroisse d'une grandeur égale à LD, & que son extrêmité supérieure ne paroisse pas plus éloignée de l'œil que l'inférieure. Je partage alors ce chassis en un même nombre de quarrés que l'esquisse par le moyen d'autres petites regles que j'attache à ses côtés. Je fais remettre ce chassis au haut de la tour dans la même position qu'auparavant, & choisissant une nuit obscure je mets un flambeau en O. Je monte ensuite sur la tour avec mon esquisse LD; je fais élever un grand tableau ou toile au lieu où doit être la statue, de façon que ce tableau soit perpendiculaire sur la tour, & que sa base soit paralelle à celle du chassis, & comme le chassis se trouve entre le flambeau & ce grand tableau, les rayons de la lumiere passant à travers les quarrés du chassis forment sur la toile la figure du chassis & de ses quarrés; mais au lieu des quarrés, je vois sur la toile des trapezoïdes plus larges par le haut que par le bas, à cause que cette toile est plus éloignée du chassis par le haut. Je rapporte dans ces trapezoïdes les traits de mon esquisse chacun dans le trapezoïde qui est la représentation du quarré de l'esquisse dans lequel il est, & donnant ensuite ce nouveau dessin à un Sculpteur, la statue qu'il fera en suivant ces proportions sera celle qu'il faut mettre au haut de la tour, afin qu'elle paroisse à l'œil O d'une hauteur égale à LD.

Or, tout ceci n'est point different de nos principes; s'il est vrai

que l'œil O voit les trapezoïdes du tableau mis derriere le chassis de la même grandeur que les quarrés du chassis, il est clair que cela ne provient que de ce que l'œil les voit sous les mêmes angles, puisque les rayons de la lumiere prolongés au-delà du chassis donnent précisément les mêmes angles que les rayons visuels qui partiroient de l'œil, & qui passant par les angles du chassis & de ses quarrés iroient se terminer sur le tableau; il est vrai qu'en tâtonnant pour trouver la grandeur qu'on doit donner au chassis, il semble qu'on veut se défier de cette regle qu'on adopte cependant à l'égard des trapezoïdes; mais la raison de cela ne seroit-elle pas que la regle du Pere Tacquet n'est pas connue de tous les Peintres? qu'entre ceux qui la connoissent il y en a peu qui soient assez Géometres pour la pratiquer, & que peut-être les autres ne s'en défient que parce qu'ils ont ajouté foi trop facilement à la prétendue démonstration que le Pere Lami a voulu lui opposer. Qu'on en fasse l'expérience en suivant ce que j'ai dit plus haut, & l'on éprouvera bien-tôt que la Nature ne se dément pas. L'usage du chassis est excellent lorsqu'on veut dépeindre quelque sujet sur des surfaces concaves, telles que sont les voûtes d'une Eglise, &c.

110. Au reste dans tout ceci, mon dessein n'est pas de décrier la science du Pere Lami, ni en particulier son Traité de Perspective. Il y a dans cet Ouvrage & dans tous les autres que cet Auteur a mis au jour beaucoup d'esprit & de sçavoir. Mais enfin les Sçavans font quelquefois des fautes, & comme la plûpart des Lecteurs qui en sçavent moins qu'eux s'y laissent ordinairement surprendre, il est bon de les leur mettre devant les yeux, de peur de laisser dépraver le véritable goût des Sciences & des Arts.

Des Ombres.

111. La lumiere est dite *Directe* lorsque ses rayons tombent directement sur un objet, *Oblique*, lorsque ses rayons tombent obliquement, & *Réflechie* lorsque ses rayons tombant directement ou obliquement sur un certain nombre d'objets vont se réflechir sur un ou plusieurs objets sur lesquels ils ne tomboient ni obliquement ni directement.

112. Soit un corps AE, (*Fig.* 71.) compris sous plusieurs faces, si deux de ces faces ABCD, ABFH sont éclairées, & que les rayons de la lumiere tombent sur l'une & l'autre avec la même

obliquité: ces deux faces feront dans une clarté égale, & comme les rayons ne pourront percer la folidité du corps, les deux autres faces LECD, LEFG oppofées aux autres n'étant éclairées ni directement ni obliquement feront dans une obfcurité qu'on ne verra qu'à la faveur des rayons réflechis des objets ou du terrein qui feront aux environs; & dans ce cas l'obfcurité de ces deux faces fera égale, fuppofé qu'il ne fe trouve pas à quelque diftance des objets éclairés dont les rayons réflechis donnent plus fur l'une que fur l'autre.

Mais fi les rayons de la lumiere font moins obliques fur la face ABFH que fur la face ABCD, la face ABFH fera plus claire que la face ABCD, & la face LECD oppofée à la face ABFH plus obfcure que la face HLEF oppofée à la face ABCD par la raifon qu'il y aura plus de parties de terrein éclairées à quelque diftance de celle-ci qu'il ne s'en trouvera à quelque diftance de l'autre, & que par conféquent les rayons réflechis diminueront un peu l'obfcurité.

113. Lorfqu'entre la lumiere & le terrein il fe trouve un corps opaque, les rayons qui tombent fur quelques-unes des faces de ce corps ne pouvant paffer à travers le folide, ne peuvent pas non plus éclairer les parties du terrein qui font de l'autre côté, & c'eft l'obfcurité de ces parties de terrein qu'on nomme *Ombre* du corps, par la raifon qu'elle en a la reffemblance. L'ombre eft quelquefois fur le terrein, quelquefois fur un corps qui eft proche de celui qui intercepte les rayons de la lumiere, & quelquefois en partie fur le terrein, & en partie fur les corps voifins.

114. Il y a donc des clairs & des obfcurs plus grands les uns que les autres, & par les mêmes raifons des ombres plus fortes les unes que les autres. Tout cela en géneral fe nomme le *Clair obfcur*, & l'art qui apprend aux Peintres à ménager leurs teintes de façon que le *Clair obfcur* foit bien entendu fe nomme *Entente* ou *Intelligence du Clair obfcur*. Cet art eft géneralement fi eftimé, qu'un Peintre qui le poffede parfaitement eft prefque toujours plus renommé qu'un autre qui en fçait plus que lui dans d'autres parties. Les Batailles d'Alexandre & tous les autres ouvrages de Le Brun font certainement mieux deffinés que les tableaux de Rubens, & en particulier ceux de l'hiftoire du mariage d'Henry IV. qu'on voit à Paris dans la galerie du Luxembourg; mais comme dans ceux ci le *Clair obfcur* eft beaucoup mieux ménagé que dans les tableaux de Le Brun, il n'eft prefque perfonne qui ne donne la

préference à Rubens. Je n'entreprendrai point de dire mon sentiment là-dessus; ce qu'il y a de certain, c'est qu'en joignant ensemble les talens de Rubens & ceux de Le Brun, on feroit un Peintre beaucoup plus parfait que les Raphaels, les Michel-Anges, & que tous les Peintres que la vénérable Antiquité nous fait regarder comme des hommes inimitables. Les hommes d'aujourd'hui valent bien ceux d'autrefois, il ne s'agiroit que d'étouffer dans leur cœur la trop grande ambition du gain, & d'y faire naître un plus grand désir de la gloire.

115. Les ombres proviennent, ou de l'interception des rayons du Soleil, ou de l'interception des rayons d'un flambeau, & les unes & les autres sont bien differentes entr'elles.

Le Soleil étant extrêmement éloigné de la surface de la terre, & les objets que nous dépeignons ordinairement fort petits, eu égard à cet immense éloignement, il est clair que si des deux extrêmités A, C, (*Fig.* 72.) d'un objet AC, on tire des rayons au Soleil, ces rayons feront avec l'objet AC un triangle dont le Soleil sera le sommet, & l'objet sera la base; & cette base étant extrêmement petite par rapport aux côtés, chaque angle sur la base de ce triangle ne differera pas sensiblement d'un droit, & que par conséquent les rayons du Soleil qui passent par les extrêmités A, C peuvent être regardés comme paralelles sans craindre d'y commettre aucune erreur, & c'est de quoi l'expérience nous assure; car si entre un mur & le Soleil on interpose un bâton dont la position soit paralelle au mur, & qu'on prenne sur ce mur la grandeur de l'ombre du bâton, on trouvera que la longueur du bâton & celle de son ombre seront parfaitement égales, ce qui provient, comme je viens de le dire, de ce que les rayons qui passent par les extrêmités du bâton & qui vont terminer son ombre sur le mur, sont paralelles ou approchent infiniment du paralellisme.

Il n'en est pas de même des ombres qui proviennent d'un corps intercepté entre un objet & la lumiere d'un flambeau; car un flambeau étant toujours à une distance médiocre du corps qu'il éclaire & dont il termine l'ombre, les rayons menés du flambeau aux extrêmités du corps font avec lui un triangle dont la base est bien éloignée d'être infiniment petite par rapport aux côtés; c'est pourquoi les angles sur la base n'étant pas sensiblement droits, les rayons vont en divergeant, & plus les endroits où ils vont terminer l'ombre sont éloignés de l'objet, plus cet ombre s'élargit

& devient grande, eu égard cependant aux differentes positions dans lesquelles le corps peut se trouver par rapport à son ombre. Car si le corps est paralelle à son ombre, cette ombre sera plus grande que s'il étoit dans une position oblique, &c. ce qui peut varier encore pour bien d'autres raisons.

Regles pour les Ombres Solaires.

116. La plûpart des Auteurs qui ont écrit sur la Perspective ont donné des regles touchant les ombres solaires si obscures & si difficiles à entendre, qu'on se dégoûte de cette Science quand on est venu jusques-là. Pour ne pas tomber dans le même inconvénient, le parti qu'il m'a paru devoir prendre, c'est de marquer sur le plan les ombres des corps, & de chercher ensuite sur le tableau les apparences de ces ombres, de la même façon qu'on y cherche les apparences des lignes & des surfaces. Il n'est donc question que de trouver une maniere aisée de tracer ses ombres sur le plan; & c'est à quoi on parviendra bien-tôt, si l'on fait attention aux principes suivans.

117. Lorsque le Soleil est sur l'horizon, l'ombre sur le terrein d'un corps élevé sur ce terrein est infinie, car les rayons du Soleil sont alors paralelles à la surface du plan; mais à mesure que le Soleil s'éleve, ses rayons commencent à faire avec le plan des angles qui vont en augmentant jusqu'à midi, & par conséquent l'ombre d'un corps diminue jusques vers le milieu du jour; après quoi, comme le Soleil commence à se rapprocher de l'horizon, l'ombre augmente jusqu'à la fin du jour, de la même façon qu'elle avoit diminué. Ainsi à l'heure du midi, l'ombre est la plus petite, à onze heures de matin, & à une heure après midi elle est égale, de même qu'à dix heures du matin & à deux heures après midi, & ainsi de suite. Ceci est géneralement vrai à l'égard des Pays qui sont sous la Zone torride & sous les deux Zones temperées; mais à l'égard des Pays qui sont sous les Zones glaciales & surtout sous les poles, les choses vont un peu autrement; par exemple, sous les poles on voit le Soleil pendant trois mois consécutivement, & comme le cercle que le Soleil décrit dans l'espace de 24 heures est paralelle à l'horizon, les ombres des corps ne diminuent ni n'augmentent pas du moins sensiblement pendant cet intervalle, & ce n'est que de 24 en 24 heures qu'on peut s'appercevoir d'une petite augmentation ou d'une petite diminution.

Nous ne parlerons ici que des ombres qui concernent les Zones temperées & la torride, par la raison qu'on ne s'avise pas de faire des dessins & des tableaux pour ceux qui habitent sous les poles, s'il est vrai que ces Pays soient habités.

118. Les clairs, les obscurs & les ombres sont differens sur le terrein selon les differentes parties du Ciel où le Soleil peut se trouver, eu égard à la position de la ligne de terre ou du tableau. Ordinairement on pose la ligne de terre de façon que le tableau soit directement opposé au midi, & alors le Soleil levant est à la gauche du tableau, & le Soleil couchant est à sa droite; & la raison en est que dans l'hémisphere où nous sommes, si nous tournons les yeux vers le midi, le levant est à notre gauche, & le couchant à la droite. Mais ce seroit le contraire, si nous étions dans l'autre hémisphere; car alors, pour voir le Soleil à midi, il faudroit tourner les yeux vers le Nord, & le Soleil levant seroit à droite, & le couchant à gauche. C'est ainsi que les Géographes font leurs Cartes Géographiques, à cause que dans notre hémisphere nous voyons dans le Ciel l'étoile du Nord; au reste, ce que je viens de dire au sujet de la position de la ligne de terre, n'est pas une regle génerale que je veuille établir, on peut mettre cette ligne comme on voudra, selon que l'exigeront les objets qu'on veut représenter, pourvû qu'on observe ce que je vais dire au sujet de la position du Soleil dans le Ciel, eu égard à cette ligne.

119. Le Soleil peut se trouver dans le Ciel ou hors du plan du tableau du côté de l'œil, ou hors du plan du tableau de l'autre côté, ou dans le plan du tableau.

Soit, par exemple ABCD, (*Fig.* 73.) le plan du terrein, P les pieds du spectateur, PO la hauteur de l'œil O, MN la ligne de terre sur laquelle est élevé perpendiculairement le plan MNEF du tableau, si l'ombre MRSN de ce tableau est tournée du côté du spectateur, le Soleil est hors du plan du tableau & au-delà de ce plan par rapport à l'œil; car les rayons HR, LS qui terminent l'ombre de la base supérieure FE sont dans un plan HRSL qui coupe le tableau; & le Soleil d'où émanent ces rayons est au-delà du tableau par rapport à l'œil. Au contraire, si l'ombre MVXN est de l'autre côté du tableau, les rayons FV, EX qui terminent l'ombre de FE sont aussi dans un plan FVXE qui coupe la tableau, & le Soleil dont ils émanent est hors du plan du tableau du côté de l'œil. Mais si l'ombre du tableau n'est ni

d'un côté ni d'autre par rapport à l'œil, & qu'elle ne soit qu'une ligne droite NI qui est le prolongement de la base MN du tableau; alors le rayon IE forme avec l'ombre NI & le côté NE du tableau un triangle ENI qui fait avec le plan du tableau un seul & unique plan. C'est pourquoi, si l'on conçoit que ce plan soit prolongé indéfiniment, il passera par le Soleil qui dans ce cas est dans le prolongement de la ligne IE du côté de E.

120. *Si plusieurs lignes droites* AB, CD (Fig. 74.) *élevées perpendiculairement ou obliquement sur le terrein sont paralelles entr'elles, leurs ombres* AH, CE *sont aussi paralelles sur le terein.* Car à cause que la ligne BD qui passe par les extrêmités de ces lignes est très-petite eû égard à la longueur immense des rayons du Soleil qui passent par les mêmes extrêmités, & qui terminent sur le terrein les ombres AH, CE, ces rayons BH, DE sont paralelles entr'eux (*N.* 115.); or, les droites BA, DC sont aussi paralelles entr'elles, donc les triangles BAH, DCE sont paralelles; or, ces deux plans paralelles coupent le plan du terrein aux lignes AH, CE qui sont les ombres des côtés AB, CD, donc ces ombres sont paralelles sur le plan du terrein.

121. *Si plusieurs lignes droites* AB, CD (Fig. 74.) *élevées perpendiculairement ou obliquement sur le terrein, sont paralelles entr'elles, leurs ombres* AH, CE *sur le terrein sont entr'elles dans la même raison que ces lignes.* Car les triangles BAH, DCE sont paralelles, & leurs côtés le sont aussi, donc leurs angles sont égaux chacun à chacun, & par conséquent leurs côtés sont proportionnels, & nous avons AH. CE :: AB. DC.

122. *Quand le Soleil est dans le plan du tableau* (Fig. 75.) *l'ombre* EH *d'une ligne* EF *perpendiculaire sur le plan* ABCD *du terrein est paralelle à la ligne de terre* AB. Concevons que sur cette ligne de terre AB soit élevé le plan ABMN du tableau perpendiculaire sur le terrein, le côté BM de ce tableau sera aussi perpendiculaire sur le terrein; or, à cause que le Soleil est supposé dans le plan du tableau, l'ombre BV du côté BM sera le prolongement de la ligne de terre (*N.* 119.); donc l'ombre EH de la ligne EF paralelle à BM sera paralelle à BV (*N.* 120.), & par conséquent paralelle à AB.

123. *Quand le Soleil est hors du plan du tableau du côté de l'œil ou de l'autre côté* (Fig. 76.) *l'ombre* EH *d'une ligne* EF *perpendiculaire sur le plan* ABCD *du tableau est oblique sur la ligne terre* AB. Concevons que le tableau ABMN soit mis sur la ligne AB perpendiculairement

diculairement sur le terrein ABCD, & que le Soleil soit au-delà de ce plan par rapport à l'œil ; l'ombre AV du côté AN tombera sur le terrein du côté du spectateur, & fera un angle avec la ligne de terre AB, & l'ombre EH de la ligne EF sera paralelle à AV à cause que les deux lignes AN, EF perpendiculaires sur le terrein sont paralelles entr'elles ; donc la ligne EH prolongée, s'il le faut, coupera la ligne de terre AB, & ne lui sera pas paralelle Et on prouvera la même chose si l'ombre de la ligne AN étoit de l'autre côté du tableau.

124. *Remarque.* Dans les plans de Fortification on suppose toujours que le jour vient de gauche à droite, mais en fait de Dessein & de Peinture, il est permis de faire venir le jour d'où l'on veut, & de supposer que le Soleil est dans tel point du Ciel que l'on voudra, pourvû que l'on observe qu'il ne soit pas en face du tableau du côté de l'œil ou du côté opposé. Si la lumiere venoit directement du côté de l'œil, tous les objets élevés sur le plan du terrein seroient presque tous éclairés, & si elle venoit du côté opposé, les objets élevés sur le plan seroient presque tous obscurs, & dans l'un & l'autre cas le *clair-obscur* n'étant pas assez mélangé feroit un fort vilain effet.

125. Probleme. *Trouver sur le plan* ABCD *les ombres de plusieurs lignes* EF, MN, &c. *élevées perpendiculairement sur le terrein le Soleil étant dans le plan du tableau* (Fig. 77.).

Comme les ombres sont plus ou moins grandes selon que le Soleil est plus ou moins élevé sur l'horizon ; je détermine la grandeur de l'une des ombres EH ou à discrétion ou en la mesurant sur le terrein précisément à l'heure à laquelle je suppose que je voyois les objets sur le terrein ; & comme dans la supposition l'ombre EH est paralelle à la ligne de terre. Je mene par le pied M de l'autre ligne MN la droite MR paralelle à la ligne de rerre ; & je dis par Regle de Trois : comme la ligne FE est à son ombre EH, ainsi la ligne MN est à un quatriéme terme qui sera la longueur de l'ombre MR, & ainsi des autres (*N.* 121.).

126. Probleme. *Trouver sur le plan* ABCD (Fig. 78.) *les ombres de plusieurs lignes* EF, MN, &c. *paralelles entr'elles, & élevées obliquement sur le plan, le Soleil étant dans le plan du tableau.*

Des extrêmités F, N des lignes EF, MN, &c. j'abaisse sur le plan du terrein les perpendiculaires FP, NQ ; je cherche par le Problême précedent les ombres PS, QR des hauteurs FP, NQ, &c. puis menant les droites ES, MR, ces droites sont les om-

bres demandées des lignes EF, MN, &c. ce qui porte avec soi sa démonstration.

127. PROBLEME. *Trouver sur le plan* ABCD (Fig. 79.) *l'ombre d'une ligne* EF *élevée en l'air, le Soleil étant dans le plan du tableau.*

Des extrêmités E, F, j'abaisse sur le plan les perpendiculaires FP, FQ, je cherche, comme ci-devant, les ombres PR, QS des hauteurs EP, FQ, & la ligne RS menée par les extrêmités R, S de ces ombres est l'ombre de la droite EF.

128. PROBLEME. *Trouver sur le plan* ABCD (Fig. 80.) *les ombres de plusieurs lignes* EF, MN, &c. *perpendiculaires sur le terrein, le Soleil n'étant pas dans le plan du tableau.*

Supposons que le Soleil soit au-delà du tableau par rapport au spectateur R. Je détermine l'ombre EH de l'une des perpendiculaires EF à volonté ou en la mesurant sur le terrein, comme j'ai dit ci-dessus, ensuite de l'extrêmité M de la droite MN, je mene ML paralelle à EH, & je dis par Régle de Trois : comme la ligne EF est à son ombre EH; ainsi la ligne MN est à un quatriéme terme qui sera la longueur de l'ombre ML.

Et l'on feroit la même chose si les lignes EF, MN paralelles entr'elles étoient inclinées obliquement sur le terrein, & si le Soleil étoit du côté du spectateur par rapport au tableau.

D'où il est aisé de voir ce qu'il faudroit faire pour trouver sur le plan les ombres des lignes élevées en l'air, le Soleil n'étant pas dans le plan du tableau.

Les ombres des surfaces & des corps étant terminées par les ombres des lignes qui terminent ces surfaces & ces solides, & par lesquelles les rayons du Soleil passent; on trouvera ces ombres sur le plan de la même façon.

128. PROBLEME. *Trouver sur le tableau les apparences des ombres des lignes des figures, & des corps élevés sur le plan.*

Il faut tracer sur le plan les ombres des lignes des figures & des corps selon les Régles des Problêmes précédens, & ensuite chercher les apparences de ces ombres sur le tableau de la même maniere qu'on y cherche les apparences des lignes & des surfaces tracées sur le terrein.

129. Cette méthode est la plus simple, la plus générale & la plus intelligible qu'on puisse donner touchant les apparences des ombres; mais comme elle n'est pas la plus courte pour la pratique, je vais donner des moyens courts & faciles qui la rendront beaucoup plus parfaite que toutes les autres.

130. Si le Soleil est dans le plan du tableau, soit le plan ABCD (*Fig.* 81.) dont la ligne de terre est AB, la principale MN, & sur lequel sont élevées perpendiculairement deux lignes droites EF, PQ. Les triangles FES, PQT formés par les lignes EF, PQ avec leurs ombres ES, PT, & les rayons du Soleil FS, QT qui terminent ces ombres sont paralelles entr'eux, & comme leurs bases ES, PT sont paralelles à la ligne de terre AB, il est clair que si l'on mettoit le tableau *abcd* sur la ligne de terre AB perpendiculairement sur le terrein, les triangles FES, PQT seroient paralelles au tableau, & leurs côtés EF, PQ paralelles au côté *ad* du tableau. Je prens sur ce côté *ad* une partie quelconque *ax*, & je dis par Régle de Trois : comme la ligne EF est à son ombre ES sur le terrein; ainsi la ligne *ax* est à un quatriéme terme, & ce quatriéme terme *ay* sera l'ombre de la partie *ax* du côté *ad* du tableau perpendiculaire sur le terrein au point A du plan. Menant donc la ligne *xy* le triangle *axy* sera paralelle aux deux autres triangles EFS, PQT, & les côtés de ces trois triangles seront paralelles entr'eux & au tableau. Or, les apparences dans le tableau de plusieurs lignes paralelles entr'elles, & au tableau sont paralelles par la raison que les triangles visuels formés par les rayons menés de l'œil à leurs extrêmités, sont coupés par le tableau paralellement à leurs bases; donc les apparences *fs*, *qt* des rayons solaires FS, QT dans le tableau, seront paralelles à la droite *xy*, de même que les apparences *es*, *pt* des droites ES, PT seront paralelles à *ay*, & que les apparences *ef*, *pq* des droites EF, PQ seront paralelles à la droite *ax*. Pour trouver donc sur le tableau les apparences des ombres ES, PT, je cherche d'abord les apparences *ef*, *pq* des droites EF, PQ à l'ordinaire; après quoi menant des points *e*, *p* des droites *es*, *pt* paralelles à *ay*, & des points *f*, *q* des droites *fs*, *qt* paralelles à la droite *xy*, & qui coupent les précédentes aux points *s*, *t* les droites *es*, *pt* seront les apparences des ombres ES, PT, ce qui est évident.

Au moyen de ceci on voit que quand le Soleil est dans le plan du tableau, il n'est pas nécessaire de tracer sur le plan toutes les ombres des différentes perpendiculaires EF, PQ qui peuvent être élevées sur le plan en différens points, & que pourvû qu'on ait déterminé la grandeur *ay* de l'ombre de la partie *ax* du côté *ad* perpendiculaire sur le terrein, & mené la droite *xy*, il ne s'agit plus que de trouver sur le tableau les apparences *ef*, *pq* des perpendiculaires EF, PQ, & mener ensuite par les points *e*, *p* des

paralelles à la base du tableau, & par les points f, q des paralelles à la droite xy, lesquelles termineront aux points s, t, les apparences es, pt des ombres des perpendiculaires EF, PQ sur le terrein, ce qui est extrêmement simple, & très-facile à pratiquer.

131. Si le Soleil est au-delà du plan du tableau par rapport à l'œil. Soit le plan ABCD (*Fig.* 82.) dont la principale est MN, la ligne de terre est AB les pieds du spectateur R, & sur lequel sont élevées des perpendiculaires EF, PQ, &c. dont les ombres ES, PT, &c. sont paralelles à l'ombre AV que feroit le côté du tableau qui seroit élevé perpendiculairement sur la ligne de terre AB; ainsi les triangles EFS, PQT, sont paralelles entr'eux & leurs côtés aussi; mais comme l'ombre AV coupe la ligne de terre AB, les deux ombres ES, PT paralelles entr'elles couperoient aussi la même ligne de terre si elles étoient prolongées, & les deux rayons solaires ES, QT paralelles entr'eux ne seroient point paralelles au plan du tableau; c'est pourquoi si les ombres ES, PT étoient prolongés jusqu'à l'horizon, elles nous paroîtroient aller aboutir à un même point de l'horizon; & si les rayons solaires FS, QT étoient prolongés jusqu'au Soleil, ils nous paroîtroient aller aboutir à un même point du Ciel, c'est-à-dire au lieu où seroit le Soleil.

Nous avons donc à trouver sur le tableau deux points, l'un qui soit l'apparence du point de l'horizon auquel les ombres SE, PT, nous paroîtroient aller aboutir, & l'autre le point du Ciel auquel les rayons solaires SF, TQ, nous paroîtroient se terminer.

Pour trouver le premier de ces points, je mene des pieds R du spectateur une ligne RX paralelle aux droites AV, ES, PT, & qui coupe la ligne de terre en X. Je porte sur la base du tableau la grandeur NX de n en x, & du point x je mene dans le tableau la ligne xi paralelle au côté ad, & qui coupe l'apparence hl de la ligne horizontale en un point i, qui est le point auquel les apparences des ombres ES, PT prolongées jusqu'à l'horizon iront aboutir dans le tableau. Car si je conçois que le tableau soit mis sur la ligne de terre AB perpendiculairement sur le terrein, ensorte que le point n tombe sur le point N, le point x tombera sur le point X, & la droite xi sera perpendiculaire sur le terrein au point X; & comme xi est égale à la droite al qui est égale à la hauteur RO de l'œil du spectateur au-dessus du point R, le rayon visuel Oi mené de l'œil O au point i sera paralelle à la droite RX, & par conséquent paralelle aux ombres SE, TP; ainsi ces ombres

SE, TP prolongées jusqu'à l'horizon paroîtroient aller aboutir au point où le rayon visuel O*i* mené de l'œil par le point *i* iroit couper l'horizon. Or l'apparence de ce point sur le tableau est le point *i*; donc les apparences sur le tableau des ombres SE, TP prolongées doivent passer par le point *i*.

Pour trouver l'autre point, je dis par Régle de Trois: comme l'ombre ES est à la ligne EF; ainsi la droite RX est à une quatriéme ligne que je porte sur la ligne *xi* de *x* en 2. Je prolonge 2*i* au-delà de *i*, & faisant 23 égal à la hauteur *al*, le point 3 est le point où les apparences sur le tableau des rayons solaires SF, TQ prolongés jusqu'au Soleil se couperont. Car si je conçois que le tableau soit mis comme ci-devant sur la ligne de terre, la ligne *x*3 sera perpendiculaire sur le terrein au point X, & par conséquent menant du point 2 la droite 2R le triangle rectangle 2XR sera semblable au triangle rectangle FES, à cause qu'ils ont les côtés proportionnels par la construction, & ces deux triangles seront paralelles à cause de la base XR paralelle à la base ES; ainsi la ligne 2R sera paralelle au rayon solaire ES, de même qu'au rayon solaire QT. Mais à cause que la droite 23 est égale & paralelle à la hauteur RO de l'œil sur le point R, le rayon visuel O3 mené de l'œil au point 3 sera aussi paralelle à la droite 2R, & aux rayons solaires SF, TQ. Ainsi ces rayons solaires prolongés vers le soleil paroîtront aller se terminer au même point du Ciel où se terminera le rayon visuel O3 mené de l'œil par le point 3. Or le point 3 est l'apparence sur le tableau du point où ce rayon visuel va aboutir; donc les apparences dans le tableau des rayons solaires SF, TQ se termineront aussi au point 3.

Supposé donc qu'ayant cherché par les régles ordinaires les apparences des lignes EF, PQ, ces apparences soient les droites *ef*, *pq*. Je mene du point *i* par les points *e*, *p* les droites *is*, *it*, & du point 3 par les points *f*, *q* les droites 3*s*, 3*t* qui terminent les précédentes aux points *s*, *t*, & les droites *es*, *pt* sont les apparences des ombres ES, PT.

On voit par-là que quand le Soleil est au-delà du tableau par rapport à l'œil, il n'est pas nécessaire de tracer sur le plan les ombres des perpendiculaires élevées sur ce plan, & qu'il suffit pour trouver les apparences de ces ombres, de mener du point R la droite RX paralelle à ces ombres, de prendre sur la base du tableau la droite *nx* égale à NX, & de mener dans le tableau la droite *xi* qui coupe *hl* en *i*, ce qui donnera le point *i* où toutes

les apparences des ombres iront aboutir ; qu'enſuite il n'y a qu'à prendre une quatriéme proportionnelle à une ombre ES, à la ligne EF à qui cette ombre appartient & à la droite XR, faire *x*2 égale à cette quatriéme proportionnelle, & puis 23 égale à la hauteur *al* de l'œil, ce qui donnera l'apparence 3 du Soleil; d'où il faudra mener des lignes par les ſommets des apparences des perpendiculaires, & ces lignes venant à couper celles qui ſeront menées du point *i* par les pieds *e*, *p* de ces perpendiculaires donneront les apparences des ombres demandées, & la pratique de tout ceci eſt très-ſimple & très-facile quand on a une fois entendu les raiſons ſur leſquelles elle ſe trouve établie.

Si le point X tomboit ſur la ligne de terre AB prolongée d'un côté ou d'autre, il faudroit prolonger la baſe *ab* du tableau, & l'apparence *hl* de la ligne horizontale pour pouvoir y placer le point *x* & la droite *xi*3 & achever le reſte comme auparavant.

133. Si le Soleil eſt en-deçà du tableau par rapport à l'œil, ſoit le plan ABCD (*Fig.* 83.) dont la principale eſt MN la ligne de terre AB, les pieds du ſpectateur R, & ſur lequel ſont élevées perpendiculairement pluſieurs lignes EF, PQ ; il eſt clair que ſi l'on mettoit le tableau *abcd* perpendiculairement ſur le terrein & ſur la ligne de terre AB l'ombre BL de ſon côté *bc* ſeroit paralelle aux ombres ES, PT, & comme ces trois ombres ne ſont pas paralelles à la ligne de terre, ſi on conçoit qu'elles ſoient prolongées juſqu'à l'horizon, elles paroîtront au ſpectateur aller toutes aboutir à un même point de l'horizon. De même les rayons ſolaires FS, QT paralelles entr'eux ne ſont pas paralelles au tableau ; mais ils s'en éloignent davantage du côté ST que du côté FQ, c'eſt pourquoi ſi l'on conçoit encore que le plan du terrein, & la terre qui eſt par deſſous ſoient tranſparens, enſorte qu'on puiſſe voir les lignes FS, QT prolongées indéfiniment, ces lignes paroîtroient au ſpectateur aller aboutir à un même point dans la terre extrêmement éloigné du plan ABCD. Ainſi il s'agit encore de trouver ſur le tableau le point où doivent tendre les apparences des ombres ES, PT prolongées juſqu'à l'horizon, & celui où doivent ſe terminer les apparences des rayons FS, QT prolongés indéfiniment au-deſſous du plan ABCD.

Pour trouver le premier, je mene du point R la droite RX paralelle aux ombres ES, PT, & qui coupe la ligne de terre au point X, je porte la grandeur NX ſur la baſe du tableau de *n* en *x*, & du point *x* je mene *xi* paralelle au côté *bc*. Le point *i* où

cette ligne coupe l'apparence *hl* de la ligne horizontale, est le point où toutes les apparences des ombres ES, PT prolongées jusqu'à l'horizon, iront se terminer sur le tableau : ce qui se démontre comme dans le cas précedent.

Pour trouver l'autre point, je dis par Regle de Trois : comme l'ombre ES est à la ligne EF dont elle est l'ombre ; ainsi la ligne RX est à un quatriéme, & je porte ce quatriéme terme ou ligne sur *ix* prolongée, s'il le faut, de *i* en *z*, & le point *z* est celui où les apparences des rayons solaires FS, QT prolongés indéfiniment en-dessous du plan ABCD, iront se terminer.

Supposant donc que les lignes *ef*, *pq* soient les apparences des lignes EF, PQ ; je mene du point *i* aux points *e*, *p* les droites *ie*, *ip*, & du point *z* par les points *f*, *q*, les droites *zf*, *zq* qui coupent les précedentes aux points *s*, *t*, & les droites *es*, *pt* sont les apparences des ombres ES, PT, de même que les droites *fs*, *qt* sont les apparences des rayons solaires FS, QT.

Pour démontrer que le point *z* est le véritable point où les apparences *fs*, *qt* des rayons solaires FS, QT doivent tendre, mettons le tableau sur la ligne de terre AB perpendiculairement sur le terrein, ensorte que les points *n*, *x*, tombent sur les points N, X, la droite *xi* sera perpendiculaire sur le terrein au point X, & comme par la construction cette droite *xi* est égale à la hauteur RO de l'œil O sur le terrein, le rayon visuel O*i* sera paralelle à RX, & par conséquent paralelle aux ombres ES, PT, de même que *i*X est paralelle aux droites EF, PQ. Or, si nous concevons que le tableau mis sur AB soit prolongé au-dessous du plan dans la terre que nous supposons transparente, la partie *xz* de la ligne *iz* tombera sur X*z*, & sera perpendiculaire sur la ligne de terre AB en-dessous du plan ABCD ; ainsi à cause que nous avons fait ES. EF :: RX. *iz*, & que nous avons RX = O*i*, nous avons aussi ES. EF :: O*i*. *iz*, mais l'angle SEF compris entre les deux premiers termes ES, EF est droit, de même que l'angle E*iz* compris entre les deux autres O*i*. *iz* ; donc les deux triangles SEF, O*iz* sont semblables ; or, le triangle rectangle ORV est semblable au triangle rectangle *zi*O, à cause de l'angle aigu ROV égal à l'angle aigu O*zi* ; donc le triangle ORV est semblable au triangle FES, & à cause de OR paralelle à EF, & de RV paralelle à ES, le rayon visuel OV est aussi paralelle au rayon solaire FS ; ainsi les rayons solaires FS, QT prolongés indéfiniment en-dessous du plan paroîtront aller aboutir au même point où le rayon vi-

fuel OV prolongé indéfiniment iroit aboutir ; or, l'apparence fur le tableau du point où le rayon vifuel OV iroit aboutir , eft le point z où ce rayon coupe le tableau, donc les apparences *fs*, *qt* des rayons folaires FS, QT doivent tendre à ce point.

On voit par-là qu'au moyen de cette pratique , il n'eft pas néceffaire de tracer fur le plan toutes les ombres dont on cherche les apparences, non plus que dans les autres cas.

134. Les pratiques que nous venons de donner ne fervent pas feulement à trouver les apparences des ombres des lignes perpendiculaires ; mais on peut encore s'en fervir commodément pour trouver les apparences des ombres de toute forte de lignes inclinées fur le terrein ou élevées en l'air; d'où il fuit que les apparences des ombres des furfaces & des corps fe trouveront par les mêmes voyes.

Par exemple, fuppofons que dans le tableau *abcd* (*Fig*. 84.) la ligne *ef* foit l'apparence d'une ligne élevée obliquement fur le plan du terrein, & que la ligne *fp* repréfente la perpendiculaire menée fur le plan du fommet de la ligne repréfentée par *ef*, fi le point *i* eft le point où tendent les apparences des ombres des perpendiculaires ; & que le point z foit celui où tendent les apparences des rayons folaires qui paffent par les fommets des perpendiculaires, je mene par le point *i* & le point *p* la droite *ipt*, & par le point z & le point *f* la droite *zft* qui coupe la précedente en *t*, & la droite *pt* eft l'apparence de l'ombre de la perpendiculaire repréfentée par *fp*, & par conféquent le point *t* eft l'apparence de l'ombre du point *f* de la ligne *ef*; ainfi menant la droite *et*, j'ai l'apparence de l'ombre de la ligne repréfentée par *ef*.

De même, fuppofons que dans le tableau *abcd* (*Fig*. 85.) la droite *ef* foit l'apparence d'une ligne élevée en l'air, & que les droites *ep*, *fq* foient les apparences des perpendiculaires menées fur le plan des extrêmités de la ligne repréfentée par *ef*; fi le point *i* eft le point où vont aboutir les apparences des ombres des perpendiculaires, & que le point z foit le point où tendent les apparences des rayons folaires, je mene par le point z, & par les points *e*, *f* les droites *ze*, *zf*, & par le point *i*, & les points *p*, *q* les droites *ip*, *iq* qui coupent les précédentes aux points 2, 3, & les droites *p*2, *q*3 font les apparences des ombres des perpendiculaires; donc le point 2 eft l'apparence de l'ombre du point *e* de la ligne *ef*, & le point 3 eft l'apparence de l'ombre de l'autre point *f* de cette ligne *ef*, donc la ligne 23 eft l'apparence de *ef*.

De

De même encore, ſuppoſons que dans le tableau *abcd* (*Fig.* 86.) le plan *pqst* ſoit l'apparence d'un plan élevé en l'air, & que les droites *pm*, *qn*, *so*, *tu* ſoient les apparences des perpendiculaires menées ſur le terrein de tous les angles du plan repréſenté par *pqst*, je cherche les apparences des ombres de ces perpendiculaires, comme ci-deſſus, & ces apparences ſont les droites *m*2, *n*3, *o*4, *u*5, & comme les extrêmités de ces ombres ſont auſſi les apparences des ombres de tous les angles du plan repréſenté par *pqst*, je joins les points 2, 3, 4, 5 par des droites, & j'ai l'apparence 2345 de l'ombre du plan.

Pour trouver l'apparence de l'ombre d'un paralellepipede *mq*, (*Fig.* 87.) il faut obſerver quels ſont les angles qui font de l'ombre ſur le terrein, & ceux qui n'en font point; ainſi l'angle *q* ne fait point d'ombre; c'eſt pourquoi je cherche les apparences *m*2, *u*3, *o*4, des ombres des droites *pm*, *tu*, *so*, & menant les droites 23, 34, j'ai l'apparence *m*234*ou* de l'ombre du paralellepipede.

La Figure 88 repréſente deux paralellepipedes avec leurs ombres en ſuppoſant que le Soleil eſt dans le plan du tableau, comme ce cas eſt facile, je ne m'y arrête point.

135. Je nommerai *Triangle d'ombre* tout triangle dans le tableau qui ſera formé par une ligne droite perpendiculaire ſur la baſe du tableau par l'ombre de cette ligne, & par le rayon ſolaire qui termine cet ombre. Ainſi dans le tableau *abcd* (*Fig.* 87.) le triangle *tu*3 eſt un triangle d'ombre, &c.

136. PROBLEME. *Trouver ſur le tableau les apparences des ombres des lignes, des ſurfaces & des corps, dont les ombres tombent en partie ſur le terrein, & en partie ſur des ſurfaces ou des corps élevés ſur le terrein.*

Ce Problême comprend une infinité de cas dont le détail nous meneroit extrêmement loin. Il ſuffira d'en donner quelques exemples, & l'on jugera aiſément de ce qu'il faut faire dans les cas dont nous ne parlerons pas.

Soit dans le tableau *abcd* (*Fig.* 89.) l'apparence MN d'un mur élevé perpendiculairement ſur le plan du terrein, & l'apparence *ef* d'une ligne droite élevée auſſi perpendiculairement; je ſuppoſe que ſon ombre cherchée, ſelon les Régles ci-deſſus, eſt *ex*, & que le triangle d'ombre eſt *fex* du point 2 où l'ombre *ex* coupe la baſe du mur; je mene dans le tableau une droite 23 qui ſoit perpendiculaire ſur la baſe *ab* du tableau, & la partie 23 de cette ligne compriſe entre les côtés *ex*, *fx* du triangle d'ombre *fex* eſt

la partie de l'ombre de *ef* qui tombe ſur le mur, l'autre partie de l'ombre de cette ligne qui tombe ſur le terrein eſt la droite *e2*. Car le triangle d'ombre *efx* repréſente un triangle perpendiculaire ſur le terrein, & la face NL du mur ſur laquelle tombe une partie de l'ombre, repréſente auſſi un plan perpendiculaire ſur le terrein; donc la ligne dans laquelle ces deux plans ſe coupent eſt auſſi perpendiculaire ſur le terrein; mais la ligne dans laquelle ces deux plans ſe coupent doit paſſer par le point 2 où le côté *e2* du triangle d'ombre coupe la face NL, & par le point 3 où le rayon ſolaire la coupe; donc cette ligne doit être la ligne 23, laquelle repréſente une ligne perpendiculaire ſur le terrein au point 2 à cauſe qu'elle eſt perpendiculaire à la baſe *ab* du tableau.

Soit *ft* l'apparence d'une ligne élevée en l'air, & les droites *fe*, *tq* les apparences des perpendiculaires abaiſſées ſur le terrein des extrêmités de la ligne repréſentée par la droite *ft*. Je cherche, comme on vient de voir, les parties 45, 23 des ombres des perpendiculaires qui tombent ſur la face NM du mur, & menant des points 5, 3 la droite 53, j'ai l'apparence de l'ombre de *ft*, ce qui eſt évident.

De même ſoit la droite *pf* l'apparence d'une ligne élevée obliquement ſur le terrein, & la droite *fe* l'apparence de la perpendiculaire menée du ſommet de cette ligne ſur le terrein; je cherche l'ombre *ex* de la droite *ef*, & menant du point *p* au point *x* la droite *px*, j'ai ſur le terrein l'ombre *px* de la droite *pf*, mais comme la partie *6x* de cet ombre eſt interceptée par la face NL du mur, & qu'en cherchant l'ombre du point *f* qui eſt l'extrêmité de la perpendiculaire *ef*, je trouve qu'elle coupe la face NL au point 3, je mene du point 6 au point 3 la droite 63, laquelle eſt la partie de l'ombre de la droite *pf* qui tombe ſur la face NL.

Maintenant ſi on ſuppoſe que *pfe* ſoit une ſurface, & *eftq* une autre ſurface, il eſt aiſé de voir que 236 ſera la partie de l'ombre de *pfe* qui tombera ſur la face NL, & que 4532 ſera la partie de l'ombre de *eftq* qui tombera ſur la même face, & on trouvera toujours de la même façon les ombres qui tombent ſur les corps perpendiculaires ſur le terrein, ſoit que le Soleil ſoit dans le plan du tableau, comme nous l'avons ſuppoſé dans ces exemples, ou qu'il n'y ſoit pas. Venons à preſent aux ombres qui tombent ſur des plans inclinés.

Soit dans le tableau *abcd* (*Fig.* 90.), la Figure MNPQ qui repréſente un plan incliné ſur le terrein, enſorte que la droite ST

repréſente la projection de la droite PN élevée ſur le plan, & que par conſéquent le plan SPNT repréſente un plan perpendiculaire ſur le terrein ; ſoit auſſi la droite *ef* l'apparence d'une ligne élevée perpendiculairement ſur le plan ; je ſuppoſe que l'ombre de cette ligne ayant été cherchée, ſelon les Régles ci-deſſus, le triangle *fex* ſoit le triangle d'ombre qui convient à la droite *ef* ; du point *z* où l'ombre *ex* prolongée, s'il le faut, coupe la projection ST de la droite PN, je mene *zs* perpendiculaire ſur la baſe *ab* du tableau & du point *s* où elle coupe PN, je mene au point *t* où l'ombre *ex* coupe QM, la droite *st* qui coupe le rayon *fx* en *u*, & la droite *tu* eſt la partie de l'ombre de la ligne *ef* qui tombe ſur le plan incliné MNQP ; car le triangle d'ombre *efx* repréſente un triangle perpendiculaire ſur le plan du terrein, & le triangle *tzs* repréſente un autre triangle qui eſt auſſi perpendiculaire ſur le terrein à cauſe que ſon côté *zs* étant perpendiculaire ſur la baſe du tableau, repréſente une droite perpendiculaire ſur le terrein ; or, les deux triangles *efx*, *tzs* ont leurs baſes *ex*, *tz* ſur une même ligne droite ; donc ils ſont dans un même plan, & par conſéquent leurs côtés *fx*, *st*, ſe coupent au point *u*. Or, la partie *tx* de l'ombre *ex* étant interceptée en *t* par le plan incliné MNPQ ne peut plus s'étendre ſur le terrein de *t* en *x* ; donc il faut qu'elle s'étende ſur ce plan du point *t* au point *u* où le rayon ſolaire coupe le même plan, & partant la ligne *tu* eſt la partie de l'ombre de la droite *ef* qui tombe ſur le plan incliné MNPQ.

De même ſoit dans le tableau la droite *yf* qui repréſente une droite élevée obliquement ſur le plan, de façon que la droite *fe* ſoit l'apparence de la perpendiculaire menée ſur le terrein du ſommet de la droite repréſentée par *ef*. Je cherche, comme on vient de voir la partie *tu* de l'ombre de *ef* qui tombe ſur le plan incliné MNPQ, je mene du point *y* la droite *yx* à l'extrêmité de l'ombre *ex* que la droite *ef* jetteroit ſur le terrein, ce qui me donneroit ſur le terrein l'ombre *yx* de la droite *yf* ; mais comme cette ombre coupe QM en *i*. Je mene du point *i* au point *u* la droite *iu*, & cette droite eſt la partie de l'ombre de *yf* qui tombe ſur le plan incliné, ce qui eſt évident, puiſque cette partie d'ombre eſt terminée au point *u* où le rayon ſolaire *fx* coupe le même plan.

Il ſeroit inutile d'entrer dans un plus grand détail de tout ceci, ce que nous venons de dire fait comprendre aiſément de quelle maniere il faut ſe conduire dans les occaſions qui peuvent ſe preſenter.

Des Ombres au Flambeau.

137. Quoiqu'au Flambeau les ombres des lignes perpendculaires ne soient pas paralelles entr'elles, comme les ombres solaires, cependant on peut trouver ces ombres par le moyen des triangles ou plans d'ombre dont j'ai parlé ci-dessus.

138. PROBLEME. *Trouver les ombres au Flambeau des lignes perpendiculaires sur le terrein.*

Soit le tableau *abcd* (*Fig.* 91.) l'apparence d'une chambre dont le plancher inférieur est *amnb*, le supérieur *defc*, le mur du fond *mefn*, & les murs des côtés *amed*, *bnfc*; soit aussi le point O l'apparence du point lumineux, la droite O*x* l'apparence de la hauteur de ce point au-dessus du plancher inférieur *amnb*, & la droite *pt* l'apparence d'une perpendiculaire élevée sur ce plancher. Je mene du point *x* la droite *xpq* qui passe par le pied *p* de la droite *pt*, & du point O la droite O*tq* qui passe par le sommet *t* de la droite *pt*, & qui coupe *xq* en *q*, & la ligne *pq* est l'apparence de l'ombre de la droite *pt*.

Car les points *x*, *p* étant les apparences des points qui sont sur le plancher, la droite *xq* est l'apparence d'une ligne qui seroit tracée dans le plan du plancher. Or les droites O*x*, *pt* représentent des perpendiculaires sur le plancher & sur la ligne *xq*, donc les quatre lignes *x*O, O*t*, *tp*, *px* sont dans un même plan, & comme les lignes *xp*, O*t* ne sont pas paralelles; il est clair qu'en les prolongeant elles doivent se couper en un point *q* qui terminera l'ombre *pq*.

Et on trouvera de la même façon les apparences des ombres des lignes perpendiculaires, lorsque ces ombres seront toutes entieres sur le plan du plancher.

Soit la ligne droite *yz* qui représente une autre perpendiculaire sur le plancher: Je mene du point *x* par le point *y* la droite *xy*2, & du point O par le point *z* la droite O*z*3, & ces deux droites coupent le mur *bnfc* avant de se couper; ainsi une partie de l'ombre de *yz* tombe sur le mur, & pour la trouver je mene du point 2 une ligne 23 paralelle à *yz*, laquelle coupe la droite O3 au point 3, & la partie de l'ombre qui tombe sur le mur est la ligne 23, & l'autre la ligne *y*2.

Car les droites O*x*, *zy* étant perpendiculaires sur le plancher, la figure *x*O*zy* est l'apparence d'un plan perpendiculaire sur le

plancher, & comme le mur *nfcb* est aussi perpendiculaire sur le plancher, la commune section du mur & du plan *xOzy* prolongé vers le mur doit être une droite perpendiculaire sur le plancher au point 2, où la ligne *x*2 base du plan *xOzy* prolongé coupe la ligne *bn* base du mur, donc cette commune section doit être la ligne 23, & cette ligne est l'apparence de la partie d'ombre qui tombe sur le mur, puisqu'elle est terminée par le rayon lumineux O3 qui passe par le sommet z de la droite *yz*.

Et on trouvera de même que la droite 67 sur le mur du fond est la partie de l'ombre de la droite 45, & que l'autre partie de cet ombre sur le plancher est la droite 46.

Soit la droite *yz* (*Fig.* 92.) qui représente une autre droite élevée perpendiculairement sur le plancher; je mene les droites *xy*2, O*z*4, & je trouve que le plan O*xyz* prolongé coupe les deux planchers *amnb*, *defc*, & le mur *amed*, & comme le plan O*xyz* est perpendiculaire sur le plancher *amnb*, de même que le mur *dema*; la commune section de ces deux plans doit être perpendiculaire sur le plancher; menant donc du point 2 où la ligne *xy*2 coupe la base *am* du mur, la droite 23 cette ligne est l'apparence de la commune section, & par conséquent elle est aussi l'apparence de la partie d'ombre de la droite *yz* qui tombe sur le mur. Or les plans *amnb*, *defc* étant les apparences des deux planchers, lesquels sont paralelles entr'eux, & le plan O*zyx* prolongé étant l'apparence d'un plan perpendiculaire sur le plan d'en-bas, est aussi l'apparence d'un plan perpendiculaire sur celui d'en-haut, & par conséquent les lignes dans lesquelles le plan O*zyx* prolongé paroît couper les deux planchers, doivent être les apparences de deux lignes paralelles entr'elles; or, dans le cas present la ligne *x*2 dans laquelle le plancher inférieur paroît être coupé est paralelle à la base *ab* du tableau; donc la ligne dans laquelle le plancher supérieur paroîtra être coupé doit être paralelle à *x*2; ainsi menant du point 3 la droite 34 paralelle à *x*2 & terminée par le rayon de lumiere O4 qui passe par le sommet z de la droite *yz*, cette droite 34 sera l'apparence de la partie de l'ombre qui tombe sur le plancher supérieur; ainsi l'apparence de l'ombre totale de *yz* sera *y*234.

Maintenant soit la ligne *hi* qui est l'apparence d'une autre ligne perpendiculaire sur le terrein, je mene les lignes *xh*5, O*i*6, & le plan *x*O*ih* prolongé, est l'apparence d'un plan perpendiculaire qui coupe les deux planchers, & le mur *bnfc*; ainsi je trouve,

comme ci-dessus, les apparences *h5*, 59 des parties d'ombre qui tombent sur le plancher inférieur, & sur le mur *bnfc*; & quant à la partie d'ombre qui tombe sur le plancher supérieur; je vois que son apparence doit être celle d'une ligne paralelle à *h5*, à cause que les deux planchers étant paralelles sont coupés par le plan O*ihx* prolongé en deux lignes paralelles; c'est pourquoi je cherche par les Régles ordinaires l'apparence *h*8 d'une ligne élevée perpendiculairement sur le terrein au point représenté par le point *h*, & qui seroit égale à la perpendiculaire comprise entre les deux planchers; ainsi les lignes *h*8, 59 sont les apparences de deux lignes perpendiculaires sur le plancher & égales entr'elles; donc les lignes 89, *h5* sont les apparences de deux lignes paralelles, dont l'une *h5* seroit dans le plan du plancher inférieur, & l'autre 89 seroit dans le plan du plancher supérieur, & qui toutes les deux sont dans le plan *oihx* prolongé; ainsi la partie 69 de la droite 89 étant comprise entre le mur *bnfd*, & le rayon de lumiere O6 est l'apparence de la partie d'ombre qui tombe sur le plancher supérieur.

138. PROBLEME. *Trouver sur le tableau l'apparence de l'ombre au flambleau d'une ligne perpendiculaire quand une partie de cet ombre tombe sur un plan incliné.*

Soit le tableau *abcd* (*Fig.* 93.) qui représente l'intérieur d'une chambre comme auparavant, le plan *irfc* représente un plan incliné sur le plancher inférieur, & qui s'appuye sur le mur *befe*; le point O est l'apparence du point lumineux, la droite O*x* l'apparence de la hauteur du point lumineux au-dessus du plancher, & la droite *pt* est l'apparence d'une perpendiculaire sur le plancher.

Pour trouver la partie d'ombre qui tombe sur le plan incliné *irfc*; je mene les droites *xpl*, O*tl*, & du point 2 où la droite *xpl* prolongée, s'il le faut, coupe la base *eb* du mur, je mene la droite 23 paralelle à *pt*, puis du point 3 où cette droite coupe le côté *fc* du plan incliné, je mene la droite 34 au point 4 où la droite *xpl* coupe l'autre côté *ri* du plan incliné, & la partie 45 de cette droite 43 comprise entre les droites *xpl*, O*tl* est la partie d'ombre qui tombe sur le plan incliné.

Car à cause que la droite 23 représente une droite perpendiculaire sur le plancher, le triangle 342 represente un triangle perpendiculaire sur le plancher, & comme le triangle O*xl* est aussi perpendiculaire sur le plancher, & que sa base *xl* tombe sur la

baſe 42 de l'autre triangle 342 les côtés 34, O*l* de ces deux triangles ſe coupent en un point 5 ; or, par la conſtruction la droite 34 eſt dans le plan incliné *irſc*, puiſque ſes deux points 3, 4 ſont dans ce plan; donc à cauſe que la partie 45 eſt terminée par le rayon de lumiere O5 qui paſſe par l'extrêmité *t* de la droite *pt*, cette partie 45 eſt l'apparence de la partie d'ombre qui tombe ſur le plan *rſci*.

Et on prouvera de la même façon que la droite 43 ſur le plan incliné eſt la partie d'ombre de la perpendiculaire *mn*, & que l'ombre totale de cette ligne eſt *m*436.

De même à l'égard de la perpendiculaire *pt* du tableau *abcd* (*Fig.* 94.), la partie d'ombre qui tombe ſur le plancher inférieur eſt *p*4, & celle qui tombe ſur le plan incliné *rſci* eſt 45; & à l'égard de la perpendiculaire *mn*, la partie d'ombre qui tombe ſur le terrein eſt *m*4, celle qui tombe ſur le plan incliné eſt 43, & celle qui tombe ſur le plancher ſupérieur eſt 63.

139. PROBLEME. *Trouver ſur le tableau les apparences des ombres au flambeau, des lignes droites élevées obliquement ſur le terrein.*

Le Problême eſt facile à reſoudre, après ce que nous venons de dire, mais de peur qu'on ne s'y trouve embarraſſé :

Soit le tableau *abcd* (*Fig.* 98.) qui repreſente l'intérieur d'une chambre, le point O l'apparence du point lumineux, la droite O*x* l'apparence de la hauteur de ce point; la droite *pt* l'apparence d'une ligne oblique ſur le plancher, & la droite *tu* l'apparence de la perpendiculaire abaiſſée ſur le plancher inférieur du ſommet de la droite repréſentée par *pt*. Je cherche l'ombre *uz* de la droite *tu*, & comme cette ombre eſt toute entiere ſur le plancher, je mene la droite *zp* qui eſt l'apparence de l'ombre de la droite *tp*, ce qui eſt évident.

Soit dans le même tableau la droite *rq* qui repréſente une droite inclinée ſur le plancher, & la droite *q*Q qui repréſente la perpendiculaire abaiſſée ſur le plancher du ſommet de la droite repréſentée par *rq*. Je cherche l'ombre Q234 de la droite *q*Q, & l'ombre de la droite *rq* doit ſe terminer entre les points *r*, *q*, de façon qu'une partie de ſon ombre tombe ſur le plancher inférieur, une autre partie ſur le mur *beſc*, & l'autre ſur le plancher ſupérieur. Ainſi il s'agit de trouver les differentes directions que cet ombre prendra ſur ces trois plans.

Pour trouver la direction de cette ombre ſur le plancher infé-

rieur, je mene la droite Q*r*, je cherche sur la ligne *qr* un point *h* tel qu'un rayon de lumiere mené du point O par le point *h* aille couper le plancher inférieur avant de rencontrer le mur *befc*. Je mene du point *h* la droite *hi* paralelle à *q*Q & qui coupe Q*r* en *i*, & cette droite *hi* représente par conséquent une ligne perpendiculaire sur le plancher inférieur, je cherche l'ombre *i6* de la droite *hi*, & comme cette ombre est toute sur le plancher, je mene la droite *r6* qui est l'ombre de la droite *hr* qui est une partie de la droite *rq*; ainsi prolongeant *r6* en *m*, la droite *rm* est la partie d'ombre de la droite *rq* qui tombera sur le plancher.

Je cherche sur la droite *qr* un autre point 8 tel que la droite O8*l* menée du point lumineux O par le point 8 coupe *befc*; du point 8 je mene la droite 89 paralelle à *q*Q, & qui coupe Q*r* au point 9, & cette droite 89 représente par conséquent une ligne perpendiculaire sur le plancher inférieur, je cherche l'ombre 9*yl* de cette droite, ainsi le point *l* est le point qui doit terminer l'ombre de la droite *r*8; c'est pourquoi menant la droite *ml*, j'ai la direction de la partie d'ombre de la droite *rq* qui tombe sur le mur, je prolonge *ml* en *n*, & menant la droite *n*4, cette droite est la partie d'ombre qui tombe sur le plancher supérieur.

Si l'on suppose que *ihr* soit un plan élevé perpendiculairement sur le plancher, son ombre sera 16*r*; de même, si l'on suppose que 89*r* soit un autre plan perpendiculaire sur le plancher, sa partie d'ombre sur le terrein sera *r9ym*, & son autre partie sur le mur sera *ylm*, & ainsi des autres.

Dans le tableau *abcd*, (*Fig*. 99.) le plan *futc* est l'apparence d'un plan incliné sur le plancher & qui s'appuye sur le mur *befc*, la ligne *rq* est l'apparence d'une droite inclinée sur le plancher, & la ligne *qp* est l'apparence de la perpendiculaire qui seroit menée sur le plancher du sommet de la ligne représentée par *rq*. Je cherche l'ombre *p*234 de la perpendiculaire *qp*, & comme l'ombre de *qr* doit être terminée par les points *r*, *q*, l'ombre de *qr* aura une partie sur le plancher inférieur, une autre sur le plan incliné, & une autre sur le plancher supérieur. C'est pourquoi je cherche sur *rq* un point *h* tel que le rayon de lumiere O*h6* qui passera par ce point coupe le plancher en un point 6 avant de couper le plan incliné, je mene entre les droites *rq*, *rp* la droite *hi* paralelle à *pq*, & cherchant l'ombre *i6* de la perpendiculaire *hi*, la droite *r6* est l'ombre dela partie *rh* de la droite *rq* : prolongeant donc *r6* en *m*, la droite *rm* est la partie d'ombre que la droite *rq* jette

jette sur le plancher. Je prens sur *rq* un autre point 8, tel que le rayon de lumiere O8*l* qui passera par ce point coupe le plan incliné; du point 8 je mene entre les droites *rq*, *rp* la droite 89 dont je cherche l'ombre 9*yl*, comme ci-dessus; ainsi l'ombre de la partie 8*r* de la droite *rq* est *rml*, dont une partie *ml* est sur le plan incliné; c'est pourquoi je prolonge *ml* en *n*, & du point *n*, menant *n*4, j'ai l'ombre entiere *rmn*4 de la droite *rq*.

Si l'on conçoit que *pqr* soit un plan élevé sur le plancher, la partie de son ombre qui tombera sur le plancher sera *p*2*rm*, celle qui tombera sur le plan incliné sera 23*nm*, & celle qui tombera sur le plancher supérieur sera 34*n*, & ainsi des autres.

Dans la figure 100 la droite *pq* est l'apparence d'une droite élevée en l'air entre les deux planchers, & les droites *pt*, *qu* sont les apparences des perpendiculaires menées sur le plancher des extrêmités de la ligne représentée par *pq*. Je cherche les ombres de ces deux perpendiculaires, & trouvant que les ombres *y*, *z* de leurs sommets tombent sur le même mur *arhd*, je mene sa droite *yz* qui est l'apparence de l'ombre de la droite *pq*.

Dans la même figure 100, la droite *mn* représente une autre droite élevée entre les deux planchers, & les droites *mi*, *nl* représentent les perpendiculaires abaissées sur le plancher inférieur des extrêmités de la ligne représentée par *mn*. Je cherche les ombres de ces perpendiculaires, & les points 3, 2, sont les ombres des sommets *m*, *n* des perpendiculaires; ainsi l'ombre de *mn* est comprise entre ces deux points; mais comme le point 3 est sur le mur du fond, & le point 2 sur le mur *befc*, & que ces murs sont un angle, l'ombre de *mn* sera aussi un angle: & voici comme je le détermine. Je cherche sur *mn* un point 4 tel que le rayon de lumiere O46 qui passera par ce point coupe le mur *befc*; je mene du point 4 entre les droites *mn*, *il* la droite 45 paralelle à *nl*, & qui par conséquent représentera une perpendiculaire sur le plancher; je cherche l'ombre de 45, & l'ombre du point 4 sur le mur *befc* est le point 6; ainsi la droite 62 est l'ombre de la partie 4*n* de la droite *mn*; je prolonge donc 62 jusqu'à ce qu'elle coupe la droite *fe* au point 8; puis menant la droit 83, j'ai l'ombre 382 de la droite *mn*; la partie 38 est sur le mur du fond, & l'autre 82 est sur le mur *befc*, & ainsi des autres.

Dans la figure 101 le solide *mn* est l'apparence d'un paralellepipede perpendiculaire sur le plancher inférieur, le point O est le point lumineux, la droite O*x* est sa hauteur, & l'on voit de

quelle maniere il faut trouver l'ombre *muzyt9* de ce solide. De même le plan *pqri* est l'apparence d'un plan perpendiculaire sur le plancher, & l'on comprendra aisément que son ombre est *p2345i*, mais que le plan *pqri* en cache une partie.

Dans la figure 102, le plan ABCD est l'apparence d'un plan élevé perpendiculairement sur le plancher inférieur, les points O, P, sont deux points lumineux, & les droites OX, PZ sont les apparences des hauteurs de ces points au dessus du plancher. Or, dans ce cas, le plancher, les murs & le plancher supérieur sont éclairés d'une double lumiere; mais comme les rayons du point lumineux O qui tombent sur le plan ABCD ne peuvent éclairer la partie du plancher inférieur sur laquelle ils tomberoient si le plan ABCD n'étoit pas interposé, il s'ensuit que cette partie du plancher doit être moins éclairée que le reste du plancher, quoiqu'il s'en trouve une partie qui peut être éclairée par l'autre point lumineux P; par la même raison, les rayons du point lumineux P qui tombent sur le plan ABCD ne pouvant éclairer la partie du plancher sur laquelle ils tomberoient, cette partie doit être aussi moins claire que le reste du plancher, quoiqu'il y en ait une partie qui soit éclairée par l'autre point lumineux O; ainsi le plan ABCD doit avoir deux ombres, l'une, par rapport au point lumineux O, & l'autre par rapport au point lumineux P.

Pour trouver la premiere, je mene du point X par les points A, D, les droites XAH, XDL, & du point O par les points B, C les droites OBH, OCL qui coupent les précedentes aux points H, L, & menant la droite HL, j'ai l'ombre ADLH du plan ABCD par rapport aux points lumineux O.

De même, du point Z par les points A, D, je mene ZF, ZG, & du point P par les points B, C les droites PBF, PCG qui coupent les précédentes aux points F, G, & menant la droite FG, j'ai l'ombre ADGF du plan ABCD par rapport au point lumineux P.

Or, il faut observer que ces deux ombres ADLH, ADGF ont une partie commune, laquelle n'étant éclairée, ni par le point lumieux O, ni par le point lumineux P, doit être plus obscure que les deux autres parties EDLH, EAFG, dont la premiere est éclairée par le point lumineux P, & l'autre par le point lumineux O; & que par conséquent on commettroit une grande faute, si on ne faisoit pas la partie AED plus obscure que les deux autres.

140. En voilà autant, & même plus qu'il n'en faut, pour donner l'intelligence des ombres au flambeau, & pour apprendre de quelle maniere on doit les repréſenter dans un tableau; les pratiques en ſonr ſûres & faciles, il ne faut que très-peu de Géometrie pour s'en ſervir, & le tout conſiſte à ſçavoir tirer des principes les plus ſimples de la Perſpective, les conſéquences qui ſe préſentent naturellement à l'eſprit, pour peu qu'on veuille y faire attention. Je ne ſuis pas étonné que la plûpart des Peintres trouvent que les ombres, ſurtout au flambeau ſont des ſujets très-difficiles à traiter; leur méthode ordinaire eſt de chercher dans leur attelier les ombres au flambeau qu'ils veulent repréſenter; mais comme ces atteliers ne ſont pas toujours auſſi ſpacieux ni faits de la même façon que les lieux qu'ils repréſentent dans leurs tableaux, & que d'ailleurs ils n'ont pas toujours en main les figures dont ils cherchent les ombres, ils ſe trouvent dans des embarras dont ils ne ſortent qu'en travaillant à tâtons, & par-là leurs tableaux n'ont ni les beautés, ni les graces dont ils auroient pû les orner. J'eſpere que le ſecours que ce petit Traité leur préſente, ſera pour eux de quelque utilité.

141. *Remarque*. En finiſſant ici ce qui regarde les ombres & la Perſpective ordinaire, je ſuis bien aiſe de réſoudre une difficulté qui ſe préſente aſſez ſouvent dans les tableaux d'Architecture. Et c'eſt ce qu'on va voir dans la Queſtion ſuivante.

Question. *Une Colonne étant élevée perpendiculairement ſur le plan du Terrein, trouver la partie de cette colonne qu'on peut découvrir d'un coup d'œil, & la maniere de repréſenter cette partie.*

Soit le plan du terrein ABCD, (*Fig.* 103.) dont la ligne de terre eſt AB, & donr le point R eſt le lieu où ſont les pieds du ſpectateur ſoit dans ce plan, le cercle MNQ qui eſt la baſe d'une colonne ou d'un cylindre élevé perpendiculairement ſur ce plan. S l'on ſuppoſe d'abord que l'œil ſoit au point R, je mene du poinr R les tangentes RM, RN au cercle MNR, & il eſt viſiblo que l'œil ne verra que l'arc MLN compris entre les deux tangentes, & par conſéqnent moindre que l'autre arc MNQ; car à cauſe que l'œil R eſt ſuppoſé dans le même plan que celui du cercle, les rayons viſuels compris entre les deux tangentes ſeront interceptés par l'arc MLN, & ceux qui ſeront au-delà des deux tangentes n'iront aboutir à aucun point de la circonférence

Maintenant, ſuppoſons que l'œil ſoit élevé au-deſſus du point

R d'une hauteur égale à RE; du centre O du cercle & des points M, N d'attouchement j'éleve sur le plan des perpendiculaires OS, MP, NT égales chacune à RE, & menant les droites EP, ET, l'angle PET coupe le cylindre paralellement à la base, ainsi leur commune section est un cercle PT égal au cercle de la base, (je fais abstraction du renflement & de la diminution de la colonne), & les droites PE, TE sont tangentes de ce cercle; or, les droites MP, NT étant perpendiculaires sur la circonférence MLNQ de la base sont sur la surface du cylyndre, & partant les plans PMRE, TNRE touchent le cylindre aux droites PM, TN, & l'œil ne peut voir de ce cylindre que la partie MLNTHP moindre que la moitié du cylindre.

Pour représenter donc ce cylindre en Perspective, il faut chercher dans le tableau les apparences des points d'attouchement M, N, l'apparence de l'arc MLN, les apparences des perpendiculaires élevées sur les points M, N, & égale à la hauteur du cylindre, & la figure terminée par ces aparences représentera la partie du cylindre que l'on peut voir.

Quand les colonnes ont des renflemens & des diminutions, le cercle supérieur est moindre que le cercle inférieur, & si l'on coupe la colonne au point du renflement par un plan paralelle au cercle inférieur, ce plan est encore un cercle, ainsi on projettera sur le plan du terrein le cercle supérieur & le cercle du renflement, c'est-à-dire du centre O, on décrira deux cercles égaux aux cercles supérieur & à celui du renflement. On menera du point R deux tangentes à chacun de ces cercles. Puis des points d'attouchement du cercle du renflement, on élevera sur le terrein deux perpendiculaires égales à la hauteur du renflement, & des points d'attouchement du cercle supérieur on élevera sur le terrein deux perpendiculaires égales à la hauteur de la colonne, & toutes ces lignes étant mises en Perspective, on menera des apparences des points M, N des lignes aux apparences des sommets des perpendiculaires du renflement, & de-là on menera d'autres lignes aux apparences des sommets des perpendiculaires du cercle supérieur, & l'on aura l'apparence de la colonne; que si les apparences des lignes comprises entre le cercle inférieur & celui du renflement paroissoient un peu trop droites, on leur donneroit une très-petite courbure, afin qu'il ne parût pas qu'il se fit un angle au point du renflement. Tout ceci est si facile que j'ai crû pouvoir me dispenser d'en donner la figure.

Des Perspectives à vûe d'Oiseau.

142. La Perspective à vûe d'Oiseau a été imaginée pour représenter des cours environnées de Bâtimens, & comme on ne peut voir ces cours à moins qu'on ne soit élevé au-dessus des maisons qui les environnent; on se suppose élevé en l'air de façon que la hauteur de l'œil est extrêmement grande, c'est pourquoi on met le point de vûe & l'horizon beaucoup au-dessus du tableau.

Par exemple, supposé que le plan *adcb*, (*Fig.* 95.) soit celui du tableau, on prolonge ses côtés *ad*, *bc* jusqu'à ce qu'ils soient égaux à la hauteur de l'œil, & alors la ligne *lh* est l'apparence de la ligne horizontale. On y place l'apparence *r* du point de vûe *r*, les points de distance *h*, *l*, après quoi on représente les objets à la façon ordinaire. La figure 95 représente, comme on voit, une cour environnée de quatre murs, &c.

De la Perspective Militaire.

143. Dans la Perspective ordinaire, la représentation des objets tracés sur un plan est bien éloignée d'avoir les mêmes dimensions que celles du plan, & la même chose arrive à l'égard des représentations des objets élevés sur le plan. Or, comme le principal but des desseins de Fortifications est de faire voir les véritables mesures de chaque partie, on a crû pouvoir y parvenir par le moyen de la Perspective militaire, autrement dite *Cavaliere.*

Cette Perspective consiste à dessiner le plan au crayon dans ses véritables dimensions & avec toutes les largeurs de ses differentes pieces. Ensuite à tous les angles on mene des lignes paralelles à l'un des côtés du plan, & dont les hauteurs sont égales aux hauteurs des pieces qui sont sur ces angles, on joint les sommets de ces paralelles par des lignes droites, puis effaçant les lignes qui se trouvent cachées par les autres, & mettant les ombres convenables, le dessein est achevé.

Par exemple, supposons que la ligne 12 soit le côté du plan, la ligne 23 la base, la ligne ABCD l'extrêmité extérieure du parapet d'une face AB, d'un flanc BC & d'une courtine CD, que la ligne F456 soit l'extrêmité intérieure de ce parapet, que la

ligne H789 soit l'extrêmité du terre-plein, & la ligne L*mnr* l'extrêmité du talud intérieur. De plus, que EA soit l'épaisseur du talud du revêtement, la ligne AF l'épaisseur du parapet, la ligne FH celle du terre-plein, & la ligne HL celle de son talud. Je mene des points A, F des lignes AI, FP paralelles au côté 12 & égales à la hauteur du sommet du parapet au-dessus du plan; je mene aussi des points F, H des lignes FQ, HR paralelles au côté 12 & égales à la hauteur du terre-plein au-dessus du plan, je joins les droites IP, QR, RL; je fais la même chose aux autres angles du plan, & joignant les sommets des paralelles élevées à tous les angles par des lignes droites qui se trouveront paralelles à celle du plan, le dessein est achevé, comme la figure 96 le fait voir.

Comme dans ces sortes de représentations il faut effacer les lignes qui se trouvent cachées par les autres, la plûpart des lignes du plan ne subsistent plus, mais leurs dimensions se retrouvent dans les paralelles qui représentent les parties supérieures; ainsi la ligne *ih* donne la mesure de la face AB, la ligne *ht* la mesure du flanc, &c.

Pour représenter le profil ABCDEFGHIL d'un rempart avec son fossé, son chemin couvert & son glacis, je fais au point A avec la ligne de terre AG un angle MAG un peu aigu, & dont le côté AM est d'une grandeur à volonté, je mene des autres angles B, C, D, &c. du profil, des droites BN, CR, &c. égales & paralelles à la droite AM; puis menant les droites MN, NR, &c. par les extrêmités de ces paralelles, la représentation du profil est achevée, & ainsi des autres.

Ces Perspectives peuvent être bonnes en quelques occasions; mais ordinairement on représente le plan & le profil à part, & l'on s'en tient là.

Fin du Tome Second.

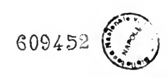


TABLE
DES CHAPITRES ET DES TITRES du second Volume.

LIVRE TROISIE'ME,

Contenant les Regles de l'Arithmétique des Infinis, & leur application à la Géométrie, la Méchanique, la Statique, l'Hydrostatique, l'Airométrie, l'Hydraulique, & un Traité de Perspective.

Fin de la Table du Tome second.

2

3

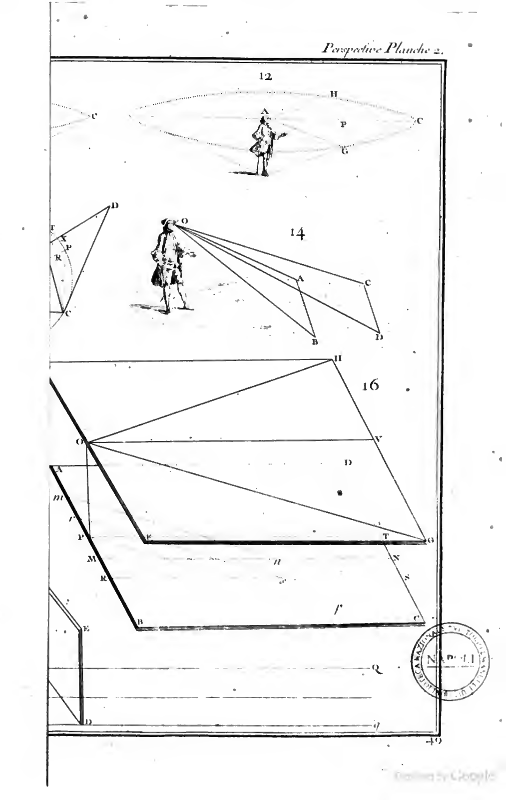
4

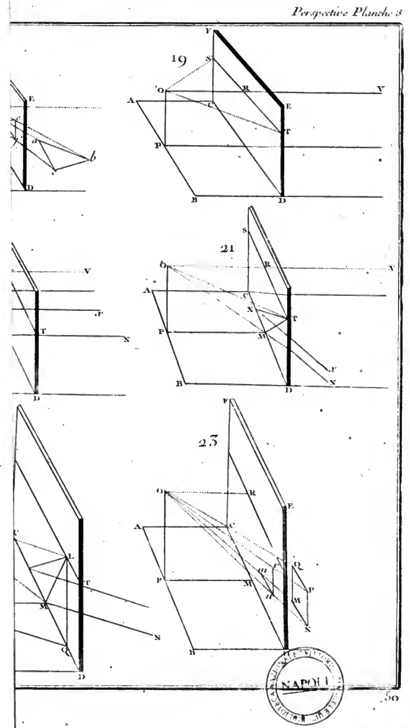
6

7

9

10

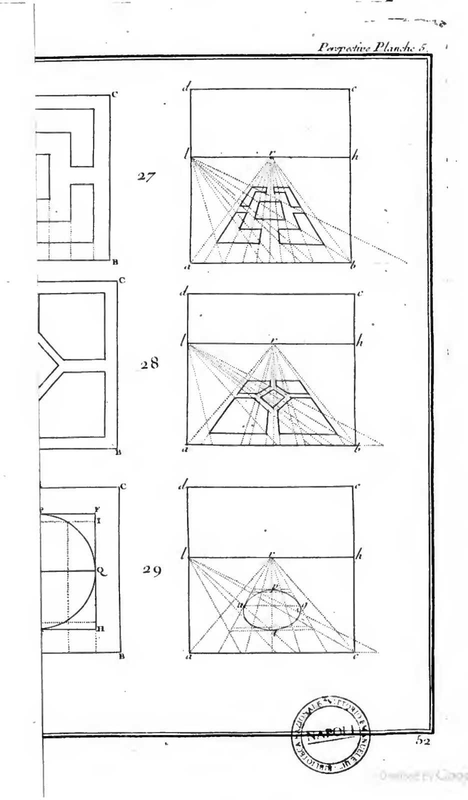

12
H
A
C
P
C
G
D
O
14
A
C
B
D
H
16
O
V
D
A
m
P
F
T
G
M
n
N
R
S
B
p
C
E
Q
D
q


19
21
23

24

25

26


C
B
27
d
c
l
r
h
a
b
C
B
28
d
c
l
r
h
a
b
C
I
Q
H
B
29
d
c
l
r
h
p
a
q
a
c

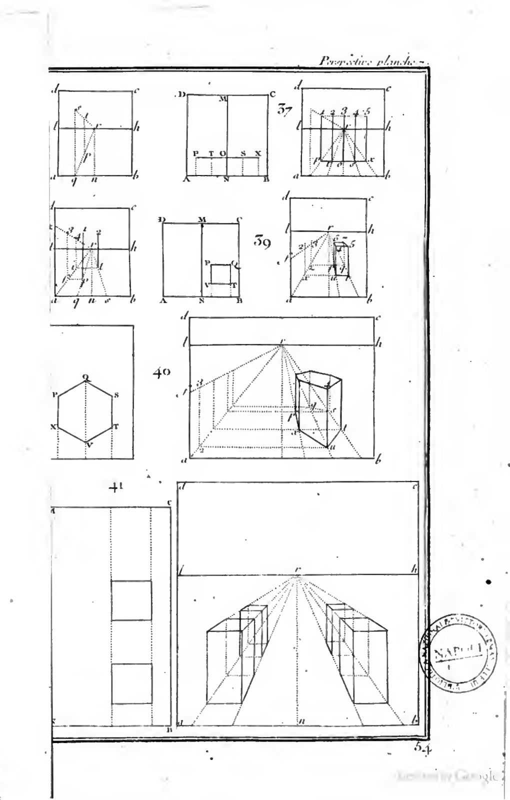


31

33

34

35


37
39
40
41
D M C
P T O S X
A N B
P Q
V T
Q
P S
X T
V
d c
l r h
a b

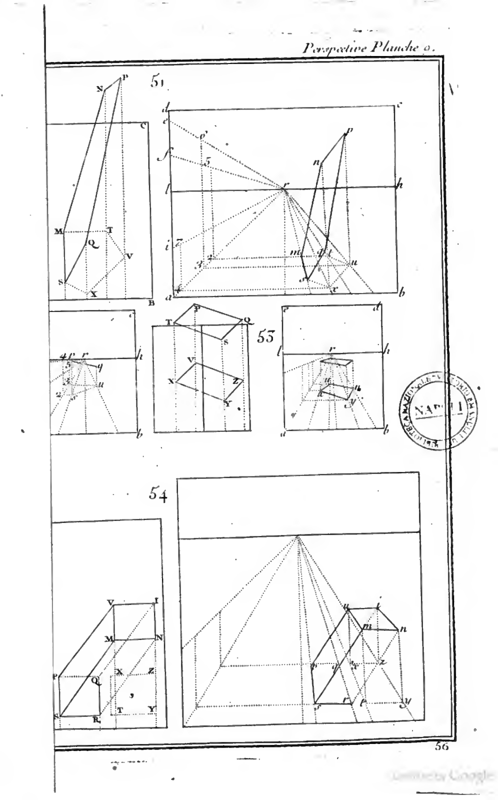
42

44

45

48

50


51
53
54
56

56

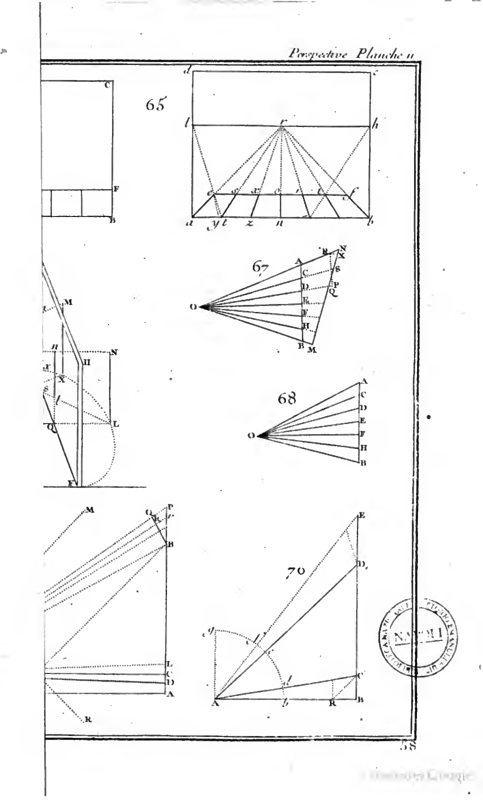
58

59

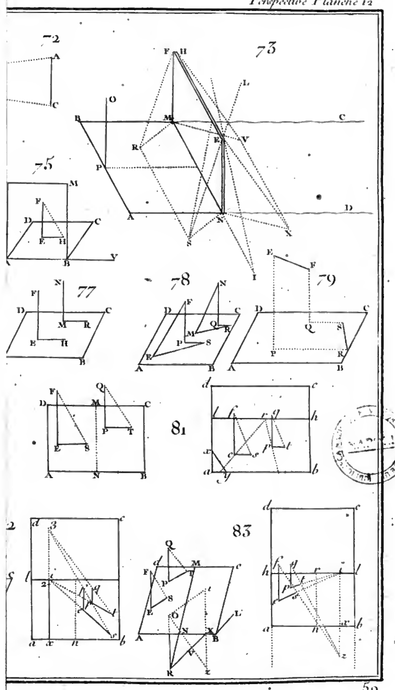
60

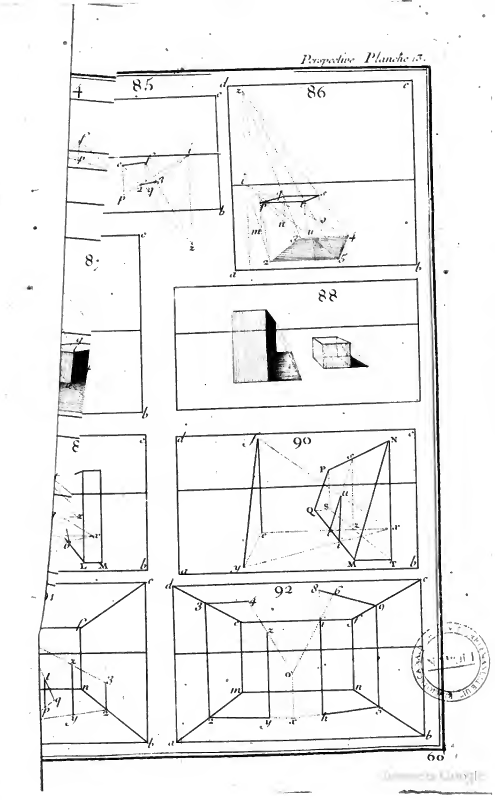
62

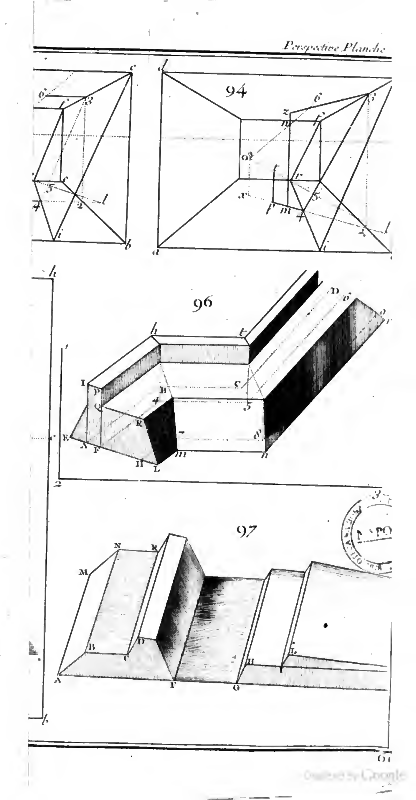
64


65
d
e
l
r
h
e
a
c
f
a
y t
z
n
b
67
A
B
C
D
E
F
H
O
M
N
X
R
S
P
Q
68
A
C
D
E
F
H
B
O
70
E
D
A
B
C
R
q
M
N
H
L
F
Q
S
X
P
G
K
L
C
D
A
R




72
73
75
77
78
79
81
82
83


85
86
88
90
92
60


94
96
97

98

99

100

101

102

103


40.k 2. vol





